ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/314835935

Operations Research The foundations of basic scientific and decisions بحوث العمليات مرتكزات اساسية وقرارات علمية

Book · December 2015

CITATIONS
0

READS
20,702

3 authors, including:

Saad Alnauimi
University of Baghdad
3 PUBLICATIONS **0** CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

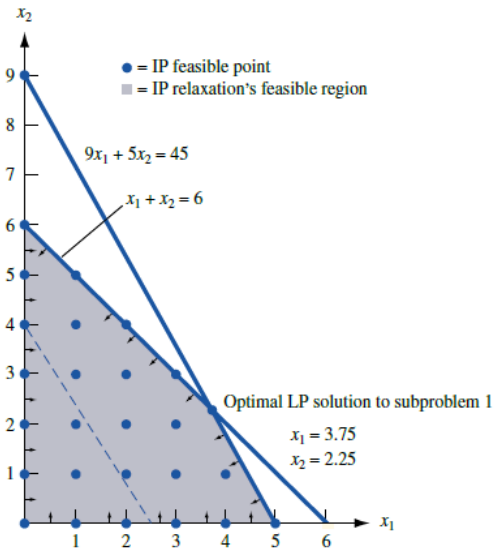
Project مقدمة في نـمـــــاذج الـــــبرمجـــــةالخطـــــــية بين النظرية والتطبيق View project

All content following this page was uploaded by Saad Alnauimi on 13 March 2017.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

بحوث العمليات

مرتكزات اساسية وقرارات علمية



المؤلفون

الاستاذ المساعد الدكتور
عبد الجبار خضر بخيت

الاستاذ المساعد الدكتور
سعد احمد عبد الرحمن النعيمي

المدرس
عباس حسين بطيخ

بغداد 2015

نبذة عن المؤلفين

الدكتور عبدالجبار خضر بخيت

استاذ مساعد / كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد / قسم الاحصاء / دكتوراه في بحوث العمليات عام 2006 / الجامعة التكنولوجية / خبرة تدريسية لمدة 21 سنة في اختصاص بحوث العمليات في الجامعات العراقية / لديه اكثر من 18 بحثا منشورا في مجال بحوث العمليات والاحصاء التطبيقي / و مشاركة في 6 مؤتمرات علمية محلية وواحد خارج العراق / ومؤلفين .

الدكتور سعد احمد عبد الرحمن النعيمي

استاذ مساعد / كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغدا / قسم الاحصاء / دكتوراة في الاحصاء التطبيقي/السلاسل الزمنية / معهد الاقتصاد المالي اللينينغرادي – عام 1989 لديه خبرة وظيفية 18 سنة وخبرة تدريسية 9 سنوات في الجامعة المستنصرية ودهوك وبغداد . و مشاركة في 6 مؤتمرات علمية محلية لديه 12 بحثا منشورا ومؤلفين

المدرس عباس حسين بطيخ الربيعي

مدرس / كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد / قسم الاحصاء/ ماجستير في بحوث العمليات / كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد عام 2006 / لقب مدرس عام 2011 / لديه خبرة تدريسية 9 سنوات/ لديه 11 بحوث منشورة / و مشاركة في 4 مؤتمرات محلية , ومؤلفي

المحتويات

	الموضوع	الصفحة
	المقدمة Introduction	أ - ب
	الفصل الاول/ مفهوم وبناءوصيغ نماذج البرمجة الخطية	1
1-1	مفهوم البرمجة الخطية Concept of Linear Programming L .P	2
2-1	بناء (صياغة) نموذج البرمجة الخطية Building (Formulation) of Linear Programming Model	8
3-1	صيغ نماذج البرمجة الخطية Forms of Linear programming Models	14
1-3-1	الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية General Form of Linear Programming Model	14
2-3-1	الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية Canonical Form of Linear Programming Model	16
3-3-1	الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية Standard Form of Linear Programming Model	18
	أسئلة وتمارين عامة	22
	الفصل الثاني/ طرق حل نماذج البرمجة الخطية	26
1-2	المقدمة Introduction	27
2-2	الطريقة البيانية The Graphical Method	28
3-2	الطريقة الجبرية The Algebraic Method	38
4-2	الطريقة المبسطة The Simplex Method حل النموذج في حالة دالة الهدف من نوع تعظيم Solution of (L.P) Model with Maximization Objective Function.	43
5-2	حل نموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة تقليل دالة الهدف (Z) Solution of (L.P) Model with Minimization Objective Function	55
1-5-2	طريقة (آم) الكبرى The (Big-M) method	55

2-5-2	طريقة ذات المرحلتين Two- Phase Method	61
	أسئلة وتمارين عامة	69
	الفصل الثالث/ الثنائية في البرمجة الخطية Duality in Linear Programming	71
1-3	مفهوم المشكلة الثنائية The Concept of Duality Problem	72
2-3	النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأولى بالصيغة القانونية Dual Problem when Primal Model in Canonical Form	77
3-3	النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأول بالصيغة القياسية Dual Problem when primal Model in Standard Form	79
4-3	ايجاد الحل للمشكلة المقابلة (الثنائية) Find a Solution for Dual Model	85
	الفصل الرابع / تحليل الحساسية Sensitivity Analysis	93
1-4	المقدمة Introduction	94
2-4	التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) Changes in the R.H.S	94
3-4	التغيرات في معاملات دالة الهدف Changes in coefficients of the Objective Function	101
4-4	التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود Changes in coefficients of variables in constraints	107
5-4	إضافة متغير أو متغيرات جديدة Addition of anew variable	107
6-4	إضافة قيد أو قيود جديدة Addition of anew constraints	109
	أسئلة وتمارين عامة	111
	الفصل الخامس/ نماذج النقل و مشاكل التخصيص Transportation Models and Assignment Problems	113
1-5	مقدمة وتعريف نموذج النقل Introduction and Definition of Transportation Model	114

2-5	موازنة نموذج النقل Balancing of Transportation Model	118
3-5	أسلوب حل نموذج النقل Solution Technique of Transportation Model	118
4-5	إيجاد الحل الأساسي الابتدائي المقبول Solution Starting Basic Feasible	122
1-4-5	طريقة الركن الشمالي الغربي North West –Corner Method	123
2-4-5	طريقة أقل كلفة Least cost Method	125
3-4-5	طريقة فوجل Vogel s Approximation Method	126
4-4-5	طريقة روسيل التقريبية Russels Approximation Method(R.A.M)	128
5-5	اختيار الحل الأساسي الابتدائي المقبول للحصول على الحل الأمثل Testing of S.B.F.S for optimal solution	133
1-5-5	طريقة المسار المتعرج Stepping Stone Method	133
2-5-5	طريقة عوامل الضرب Multipliers Method	140
6-5	مشكلة التخصيص Assignment Problem	146
1-6-5	تعريف نموذج التخصيص Definition of Assignment Model	147
2-6-5	الطريقة البديلة لطريقة التبديل Replaced Method of Arranging Method	152
7-5	طريقة الوحدات One's Method	156
	أسئلة وتمارين عامة	162
	الفصل السادس / تخطيط جداول الإنتاج باستخدام أسلوب البرمجة الخطية	164
1-6	المقدمة Introduction	165
2-6	تخطيط الانتاج Production Planning	166
3-6	التخطيط الاجمالي للانتاج Aggregate Production Planning	166

4-6	ستراتيجيات التخطيط الاجمالي Aggregate Production Planning Strategies	167
5-6	الإنتاج الإجمالي Aggregate Production	168
6-6	نماذج تخطيط الإنتاج الإجمالي Models of Aggregate Product Planning	170
1-6-6	النموذج الاول للتخطيط الاجمالي	170
2-6-6	النموذج الثاني للتخطيط الإجمالي	172
7-6	نماذج تجزئة التخطيط الإجمالي Disaggregate models	175
1-7-6	نموذج جداول الإنتاج لغرض الخزين Optimizing MPS in a make- to- stock Model	175
2-7-6	نموذج جداول الإنتاج لغرض الطلب Optimizing MPS in a make-to- order Model	176
	أسئلة وتمارين عامة	180
	الفصل السابع /نظرية المباراة Game Theory	184
1-7	المقدمة Introduction	185
2-7	المباراة ذات المجموع الصفري المستقرة Zero – sum Game	185
3-7	مفهوم الادنى–الاقصى Minimize , Maximum Criterion	187
4-7	الهيمنة Dominance	188
5-7	مباراة عدم التوازن Game without as addle point	189
1-5-7	طريقة المزيج من الاستراتيجيات Mixed strategies Method	189
2-5-7	الطريقة الحسابية Arithmetic Method	192
3-5-7	طريقة الاحتمالات المشتركة Joint Probabilities Method	193
6-7	المباراة ذات الابعاد(M*2) or (2*M) . Game of (M*2) or (2*M)	194
1-6-7	طريقة الهيمنة Dominance Method	194
2-6-7	طريقة المباراة الفرعية Sub game Method	195
3-6-7	طريقة المعادلات الخطية Linear Equations Method	197

4-6-7	الطريقة البيانية Graphical Method	201
5-6-7	استخدام البرمجة الخطية في حل مشاكل المباراة: Linear Programming Application to Solve Game Problems	203
	اسئلة وتمارين الفصل السابع	205
	الفصل الثامن الشبكات The Net works	208
1-8	المقدمة Introduction	209
2-8	مراحل جدولة المشاريع Levels of tabulations project	210
3-8	قواعد بناء (رسم) شبكات الاعمال Network Rules & Construction	211
4-8	تحليل المخططات الشبكية Network Analysis	219
1-4-8	طريقة المسار الحرج Critical Path Method	219
2-4-8	طريقة مراجعة وتقييم المشروع PERT Program Evaluation and Review Technique	226
3-4-8	احتمال الانجاز Probability of occurrence	229
5-8	اعتبارات الكلفة في جدولة المشروع: Cost Consideration In Project Scheduling	231
	اسئلة وتمارين الفصل الثامن	246
	الفصل التاسع/ البرمجة العددية Integer Programming	248
1-9	المقدمة Introduction	249
2-9	مفهوم البرمجة العددية Programming Concept of Integer	249
3-9	أنواع نماذج البرمجة العددية Types of Integer Programming Models	251
1-3-9	نموذج البرمجة العددية التامة Pure Integer Programming Models	251

2-3-9	نموذج البرمجة العددية المختلط Mixed Integer Programming Models	251
3-3-9	نموذج البرمجة العددية الثنائية Binary Integer Programming	252
4-3-9	نموذج البرمجة العددية الثنائية المختلطة Mixed Binary I.P	252
4-9	طرق حل نماذج البرمجة العددية Solution methods of I.P Models	253
	المصادر العربية والاجنبية	286

المقدمة

نظرا للصعوبة والدور الكبير الذي تؤدية عملية الوصول الى الحل الامثل في معالجة انظمة المنشأت او المعامل او المؤسسات الحكومية , عبر اتخاذ القرار المناسب او البديل

الامثل من بين مجموعة البدائل او القرارات العلمية المتاحة بأستخدام مختلف العلوم الاقتصادية والادارية والاحصائية .

اذ يعتبر هذا الكتاب باكورة بحـــوث العمليـات Operation Research والذي يدخل استخدامه في مختلف الفعاليات والنشاطات الاقتصادية للمنشأت الانتاجية والخدمية على حد سواء وخاصة فيما يتعلق بمشكلات الانتاج والتوزيع والخزين والنقل وغيرها من المشكلات التي يتطلب حلها اتخاذ مجموعة من القرارات الادارية الحاسمة من قبل متخذي القرار وذلك بأعتماد الاسس العلمية والبرامج الجاهزة بعيدا عن مبدأ الحدس والتخمين .

لقد أستند هذا الكتاب على استخدام الامثلة الواقعية في معظم فصوله , وكذلك تم أعتماد مبدأ كتابة الامثلة والتمارين باللغتين العربية والانكليزية واستخدام المصطلحات العلمية اينما تطلب ذلك ليتم تسهيل المادة وتبسيطها عند قراءة الطالب للمصادر الاجنبية مستقبلا ، اضافة لكتابة مجموعة من التمارين في نهاية كل فصل لكي تكتمل الصورة لدى الطالب بصورة كاملة.

الكتاب يتضمن تسعة فصول حيث تناول الفصل الاول مفهوم وبناء وصيغ نماذج البرمجة الخطية بشكل واضح ومبسط مع اعطاء أمثلة توضيحية لكل صيغة , في حين تناول الفصل الثاني كيفية الحل والطرق المستخدمة في حل النماذج ومنها الطريقة البيانية والطريقة الجبرية وطريقة السمبلكس في حالة كون دالة الهدف من نوع تعظيم (عظمى) ، وطريقتين هما (آم) الكبرى وطريقة ذات المرحلتين عندما تكون دالة الهدف من نوع تقليل (صغرى) , وتناول الفصل الثالث الثنائية في البرمجة الخطية من ناحية المفهوم وكيفية تحويل النموذج اذا كان النموذج في الحالتين القانونية والقياسية وطريقة الحل للنموذج المقابل , فيما تطرق الفصل الرابع الى تحليل الحساسية وحل ما بعد الامثلية ، اذ تناول جميع الحالات التي تتغير فيها مكونات نموذج البرمجة الخطية وهي (التغيرات في الطرف الايمن ، التغيرات في معاملات دالة الهدف ، التغيرات في متغيرات القرار في القيود ، اضافة متغير او متغيرات جديدة ، وأخيرا اضافة قيد او قيود جديدة). في حين تناول الفصل الخامس نماذج النقل ومشاكل التخصيص والتي كثيرا ما يستفاد منها الباحثين ، اذ بدأ الفصل بكيفية موازنة نموذج النقل ثم كيفية الحصول على الحل الاولي الابتدائي المقبول بأستخدام ثلاثة طرق هي الركن

الشمالي الغربي ، طريقة اقل كلفة ، وطريقة فوجل ، وطريقة روسيل , بعد ذلك انتقلنا للحصول على الحل الامثل لنماذج النقل باستخدام طريقتين هما المسار المتعرج وطريقة عوامل الضرب ثم تناول الفصل مشكلة التخصيص والطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص. فيما تناول الفصل السادس تخطيط جداول الانتاج الاجمالي الاول والثاتي مع اعطاء تعريف واضح للمتغيرات والثوابت في النموذج ، وتم التطرق ايضا الى نماذج تجزئة التخطيط الاجمالي ، وهي نموذج جداول الانتاج لغرض الخزين ونموذج الانتاج لغرض الطلب .وتضمن الفصل السابع نظرية المباراة وتعريف وامثلة للمباريات المستقرة وغير المستقرة , واحدث الطرق لحل تلك المباريات .فيما تضمن الفصل الثامن تحليل الشبكات من خلال بناء الشبكات وتحليلها بأستخدام طريقتي المسار الحرج وطريقة بيرت وكذلك اعتبارات الكلفة في جدولة المشروع . وتناول الفصل التاسع والاخير البرمجة العددية مفهومها وانواع نماذج البرمجة العددية وطرق حلها.

نرجوا من الباري عز وجل ان يكون عملنا هذا جهد متواضعا لكي يستفيد منه الجميع لذا نرجو من الاخوة الباحثين والتدريسيين ابداء ملاحظاتهم وتوجيهاتهم التي يمكن تجاوزها مستقبلاً . . .

ومن الله التوفيق

المؤلفون

الفصل الأول

مفهوم وبناء وصيغ نماذج البرمجة الخطية

Concept, Building (Formulation), Forms of Linear Programming Models

1-1 مفهوم البرمجة الخطية Concept of Linear Programming L .P

1-2 بناء (صياغة) نموذج البرمجة الخطية
Building (Formulation) of Linear Programming Model

1 -3 صيغ نماذج البرمجة الخطية
Forms of Linear programming Models

1-3-1 الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية
General Linear Programming Model

1-3- 2 الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية
Canonical Form of Linear Programming Model

1-3-3 الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية
Standard Form of Linear Programming Model

1-1 مفهوم البرمجة الخطية Concept of Linear Programming L .P

تعرف البرمجة الخطية بأنها نموذج رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والامكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع افضل نتيجة ممكنة، أي ان يكون توزيعها مثاليا. وتعتبر نماذج البرمجة الخطية من ابسط واسهل النماذج الرياضية، والتي يمكن انشاؤها لمعالجة المعضلات الصناعية والحكومية والمنشآت والشركات ذات الطبيعة الانتاجية.

إذن فالنموذج بشكل عام عبارة عن جزء يحمل مواصفات الكل، بحيث ان كل ما هو ايجابي في النموذج يكون ايجابيا في الكل، وكل ما هو سلبي في النموذج يكون سلبيا على الكل، ويمكن ان يكون النموذج بشكل صيغة رياضية عمل مواصفات حالة معينة من خلال عدد من العلاقات الرياضية التي تعبر عن المشكلة او الحالة التي يتم دراستها بشكل او بآخر. ان الهدف من بناء النموذج بشكل عام هو عرض وتحليل وتفسير المشكلة بطريقة مبسطة، ولكي يحقق مصمم النموذج الهدف المطلوب من وراء ذلك ينبغي ان يكون على علم تام بكل حيثيات المشكلة، مع الاخذ بنظر الاعتبار مسألة مهمة هي عدم اهمال الحقائق والمتغيرات المهمة في المشكلة بهدف التبسيط. وكلما كان النموذج قريبا من الواقع كلما كان التحليل والتنبؤ دقيقا والعكس صحيح ايضا. وبناء على ما تقدم يمكن ان نلخص مفهوم النموذج بأنه التكوين او الصياغة الملموسة الذي يهدف الى تصوير الواقع لتوضيح احد مظاهر الطريقة التي يعمل بها، وعادة يكون النموذج اقل تعقيدا من الواقع الا انه يجب ان يكون كاملا بما فيه الكفاية لتقريب مظاهر المشكلة قيد البحث.

ولغرض فهم طبيعة وانواع النماذج الرياضية وتقسيماتها سوف يتم استعراض الاسباب التي تدعو الى صياغة وبناء النماذج عامة والنماذج الرياضية بشكل خاص وكما يلي:

1- صعوبة نقل المشكلة قيد البحث من مكان الى اخر.
2- صعوبة حصر وتحديد مواصفات المشكلة قيد البحث.
3- الكلفة العالية للتعامل مع المشكلة قيد البحث.
4- المخاطر الناتجة عن المشكلة قيد البحث.
5- عدم امكانية التعامل مع المشكلة قيد البحث بشكل مباشر,

ومما تقدم في اعلاه يمكن تعريف النموذج الرياضي بانه (مجموعة من المتغيرات والعوامل المتداخلة والمترابطة فيما بينهها والتي تعبر عن مشكلة او حالة معينة، وترتبط فيما بينها من خلال عدد من العلاقات الرياضية (معادلات او متباينات) وفق صيغ معينة تهدف الى توضيح طبيعة المشكلة موضع البحث مع بيان مواصفات متغيراتها الداخلية والخارجية).

وضمن الاراء والافكار الواردة في موضوعي الاساليب الكمية وبحوث العمليات ترد عدة تقسيمات للنماذج الرياضية وكما يلي:

اولا: التصنيف الشامل للنماذج الرياضية.

ثانيا: التصنيف الرئيسي للنماذج الرياضية.

ثالثا: التصنيف الفرعي للنماذج الرياضية.

<u>اولا: التصنيف الشامل للنماذج الرياضية.</u>

وتقسم النماذج الرياضية بموجب هذا التصنيف الى ما يلي:

1-النماذج الرياضية المحددة:

هي تلك النماذج التي تتألف من عوامل ومتغيرات واضحة ومعروفة لدى متخذ القرار، أي انها بعيدة عن المؤثرات الاحتمالية الداخلية والخارجية التي تؤثر في تركيب المشكلة المدروسة، وبالتالي في صياغة النموذج الرياضي، ومنها نماذج البرمجة الخطية Linear Programming Models ونماذج النقل Transportation Model ونماذج التخصيص Assignment Models وغيرها من النماذج الرياضية.

2-النماذج الرياضية الاحتمالية

هي تلك النماذج الرياضية التي تتألف من عدة عوامل ومتغيرات احتمالية بما يتلائم وطبيعة المشكلة التي هي بطبيعة الحال غير واضحة وتتسم في كونها عرضا للكثير من المؤثرات الخارجية والداخلية ، ومنها النماذج المعتمدة في نظرية صفوف الانتظار Queuing Theory Models والنماذج المعتمدة في نماذج السيطرة على الخزين Inventory Control Models وغيرها.

3-النماذج ذات الطبيعة الستراتيجية

هي تلك النماذج الرياضية التي يتم صياغتها من قبل متخذ القرار بناء على موقف متخذ قرار آخر منافس له يعمل في البيئة نفسها والمجال نفسه، حيث يطلق على الموقف المذكور (الستراتيجية). ويذكر بأن القرار الذي يصدر في هذه الحالة استنادا الى استراتيجية متخذ القرار الاول المستندة الى ستراتيجية متخذ القرار الثاني.

ان النماذج الاستراتيجية تتسم بالبساطة اذا كانت المنافسة تجري بين اثنين فقط من متخذي القرار، وتزداد تعقيدا اذا كانت المنافسة تجري بين عدد كبير من المتنافسين، ومنها النماذج الرياضية المعتمدة في نظرية الالعاب (المباريات) Game Models Theory وغيرها من النماذج.

4-النماذج الرياضية ذات الطبيعة الاحصائية والمحاسبية

ان هذا النوع من النماذج الرياضية له استخدامات ثابتة ومعروفة يتصف بالبساطة وصفة الخطية، ومن هذه النماذج الاحصائية هي النماذج المعتمدة في الوسط الحسابي والارتباط والانحدار وغيرها من الاساليب الاحصائية، ومن النماذج المحاسبية هي النماذج المعتمدة في تحديد الفائدة البسيطة والفائدة المركبة واقساط الاندثار وغيرها المحاسبية.

ثانيا: التصنيف الرئيسي للنماذج الرياضية

وتقسم النماذج الرياضية بموجب هذا التصنيف الى ما يلي:

1- النماذج الرياضية المعيارية

وهي تلك النماذج الرياضية التي تهدف الى وصف ما يجب ان يكون عليه واقع الحال وفق صياغة رياضية معدة بشكل دقيق وثابت.

2- النماذج الرياضية الوصفية

هي تلك النماذج الرياضية التي تهدف الى وصف الحقائق والعلاقات الموجودة بين مكونات الواقع المدروس بشكل يعرض ما هو عليه واقع الحال.

ثالثا: التصنيف الفرعي للنماذج الرياضية

وتقسم النماذج الرياضية بموجب هذا التصنيف الى ما يلي:

1-**النماذج الرياضية الخطية :**

وهي تلك النماذج الرياضية التي تكن فيها العلاقة بين المتغيرات (x_j) وقيمة دالة الهدف (Z) يمكن تمثيلها بشكل خط مستقيم .

2-النماذج الرياضية غير الخطية :

وهي تلك النماذج الرياضية التي تكن فيها العلاقة بين المتغيرات (x_j) وقيمة دالة الهدف (Z) يمكن تمثيلها على شكل منحنى.

وبعد معرفة معنى النموذج Model وانواع النماذج لا بد من معرفة البرمجة الخطية Linear Programming، حيث كان الاهتمام بالبرمجة الخطية منذ نهاية ثلاثينيات القرن الماضي لتحقيق الاستخدام الامثل للموارد المنافسة التي تتصف بالندرة، وفي عام 1939 بين العالم السوفيتي كانتروفيج Kantrovich ان هناك مجموعة من مشاكل الانتاج يمكن صياغتها وفق نموذج رياضي واحد، وهذا ما سيركز عليه كتابنا في معظم فصوله، اذ يمكن استخدام الطرق الرقمية في حلها، وكان قد نشر ذلك في مطبوعة Planning of production methods in the organization mathematical وفي عام 1941 عالج فرانك هاتشوك Frank Hitchock مشاكل النقل Transportation Problems وفي عام 1945 قام Stigler بتطبيق نماذج البرمجة الخطية Linear Programming Models في تحديد وجبات الطعام للحمية Diet باقل التكاليف , واثناء الحرب العالمية الثانية قام العالم الرياضي البريطاني جورج دانتزج G. Dantizg والذي كان يعمل في سلاح الجو البريطاني بتطوير طريقة الحل المعروفة بالطريقة المبسطة او طريقة السمبلكس Simplex Method لحل المشاكل السوقية والتعبوية والمشاكل التموينية التي كانت تواجه القوات البريطانية. وبعد الحرب العالمية الثانية وزيادة الانتاج Mass Production وايجاد اسواق جديدة وتكدس المواد الاولية Materials Stockplies وتطور امكانية قوى العمل work forces قام العالم الرياضي البريطاني جورج دانتزج G. Dantzig واخرون باستخدام هذه الاساليب الكمية في حل المشاكل الانتاجية واستخدام هذه الاساليب في مساعدة المدير او متخذ القرار في عملية اتخاذ القرارات الادارية الرشيدة، وبهذا فقد تحول استخدام الاساليب الكمية وبحوث العمليات من المجالات العسكرية الى المجالات المدنية وبالذات في مجالات ادارة الاعمال.

وبناءً على ما تقدم في اعلاه فإنه لا بد من تعريف البرمجة الخطية Linear Programming بأنها (مجموعة اساليب فنية يمكن بواسطتها الحصول على المقدار الجبري الأمثل (اقصى وادنى) ويدعى ذلك بالهدف، وتتحكم فيه قيود خطية). وتهدف البرمجة الخطية الى الاستخدام الامثل للموارد المتاحة والتي تمتاز بالندرة لتحقيق اهداف المنظمة، أي ان البرمجة الخطية بشكل عام تعالج مسألة تخصيص او التوزيع الموارد او الطاقات المحدودة لتحقيق هدف معين، ويعبر عن هذا الهدف بدالة خطية تسمى (دالة الهدف Objective Function) وتكون بنوعين فإذا كان هدف المنظمة تعظيم الارباح تكون دالة الهدف من نوع (Max) تعظيم ، اما اذا كان هدف المنظمة تقليل التكاليف تكون هذه الدالة من نوع (Min) تصغير، وتخضع هذه الدالة الى عدة محددات او شروط او قيود (Constraints) وهي عبارة عن معادلات تعبر عن المواد الاولية، عدد ساعات العمل، طاقة المكائن، الطاقة الكهربائية الايدي العاملة... الخ.

مجالات ومشاكل استخدام البرمجة الخطية

يمكن القول بأن مجالات استخدام البرمجة الخطية تتلخص بما يلي:

1- تنظيم العمليات الانتاجية للحصول على اكبر ناتج ممكن ضمن الظروف المتاحة.
2- تقليل عوادم الانتاج الى اقل حد ممكن.
3- اختيار امثل الطرق لتوزيع المنتجات من مناطق انتاجها الى مواقع استخدامها.
4- تخطيط ورقابة الانتاج.
5- الوصول الى افضل استغلال لطاقات الالات والمعدات.
6- الاستفادة القصوى من المواد الاولية.

اما ابرز المشاكل التي من الممكن للبرمجة الخطية المساهمة بشكل فعال بحلها والوصول الى افضل النتائج فهي ما يلي:

1- مشاكل تخطيط الانتاج

حيث تساعد البرمجة الخطية في تحديد الكمية الواجب انتاجها من سلعة معينة والتي تؤدي الى تحقيق اعلى ربحية، ولأن الاعداد المتاحة تمتاز عادة بالندرة لكافة المؤسسات

فإن البرمجمة الخطية تعتبر الوسيلة الفعالة لتوزيع تلك الموارد على السلع المراد انتاجها بطريقة من شأنها تعظيم ارباح المنشأ او الشركة.

2- مشاكل تخطيط الاستثمار

حيث تساعد البرمجة الخطية المنشآت او المستثمرين على تعظيم الارباح من خلال توزيع الاموال المتاحة على البدائل الاستثمارية بطريقة من شأنها ان تؤدي الى تعظيم الارباح، ويعني ذلك ان المنشآت تستطيع ان تخطط استثماراتها بشكل يؤدي الى تعظيم الارباح باستخدام نماذج البرمجة الخطية.

3- مشاكل توزيع العاملين

حيث تحتاج المنشآت الى توزيع اعداد العاملين على المواقع الانتاجية , وبالضبط الى تحديد عدد العاملين اللازم بطريقة من شأنها ان تؤدي الى تخفيض التكاليف الى ادنى حد ممكن.

4- مشاكل توزيع الانتاج

حيث تساعد البرمجة الخطية المنشآت على توزيع منتجاتها التي تنتجها من خلال عدة مصانع على الاسواق المختلفة وهذا غالبا ما يحدث في مصانع المنتجات النفطية او خدمات نقل السلع الغذائية من عدة موانئ ، وتساعد ايضا على تخفيض تكاليف نقل المواد من المصانع المعتمدة الى المخازن المتعددة لتلك المنشآت.

وتجد تلك المشكلات المعروضة في اعلاه حيث تساهم البرمجة الخطية في حلها.

2-1 بناء (صياغة) نموذج البرمجة الخطية:

Building (Formulation) of Linear Programming Model

ان اهمية اسلوب البرمجة الخطية تعود الى اهمية المشاكل التي يمكن حلها بصفة عامة. ولكن ليس كل مشكلة يمكن حلها باسلوب البرمجة الخطية حيث يتطلب حل المشكلة باسلوب البرمجة الخطية ان تتوافر فيها الشروط الآتية:

1. **تحديد دالة الهدف Objective Function:** وهو الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه وامكانية التعبير عن هذا الهدف في صورة دالة خطية Linear Function والحصول على قيمة رقميه له ومحاولة تعظيم هذه القيمة وايجاد النهاية العظمى لها A

Maximum Point اذا كان الهدف المنشود ربحا او تقليل القيمة وايجاد النهاية الصغرى Minimum Point A اذا كان الهدف تكلفة أي الوصول الى ادنى تكلفة ممكنة. وتتكون دالة الهدف من المتغيرات اما المعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعظيم دالة الهدف او يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

2. **تحديد القيود Constraints:** أي امكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والامكانيات المتاحة في صورة قيود خطية Linear constraints وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة انتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة بشكل متراجحات Linear Inequalities او معادلات خطية Linear Equations ، او خليط منها وتسمى بالقيود الهيكلية.
3. **شروط عدم السلبية Non – Negativity** : اذ يجب ان تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة او صفرية وغير سالبة.

مثال (1) :

احدى الشركات الصناعية تقوم بانتاج ثلاثة انواع من المنتجات(1، 2، 3) وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب انتاجها يوميا من كل منتج بحيث تحصل على اكبر(أعظم) ربح ممكن. يتطلب انتاج الوحدة الواحدة من كل منتج المرور على ثلاثة عمليات انتاجية C (A , B ,) والجدول الآتي يبين الزمن (بالدقائق) المطلوب للوحدة الواحدة لكل منتج من العمليات المختلفة وكذلك الربح المتحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعمليات الثلاثة.

والمطلوب صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق اعلى ربح ممكن.

Example (1)

One of the industrial production of the three types of products (1, 2, 3) and want to determine the number of units that must be produced per day of each product so that you get the greatest (Maximum) profit possible, and requires the production per unit productivity of the three operations (A, B, C). The following table shows the time (in minutes)

required per unit of each product of different processes, as well as the profit derived from the per unit and total time available for the three operations.

Operation	The time required per unit of product In each production process			Total time available (mint/day)
	Prod.1	Prod.2	Prod.3	
A	2	2	3	420
B	5	0	4	440
C	3	6	0	465
Profit Per unit	5	4	7	

الحل: **Solution :**

من المعلومات في الجدول اعلاه يمكن صياغة النموذج الرياضي المطلوب على الشكل الآتي:

اولا: المتغيرات القرارية:

يتطلب الامر انتاج عدد من المنتجات من الانواع الثلاثة خلال الوقت المتاح للعمليات (الاولى والثانية والثالثة) من اجل ان نحصل على اقصى ربح.

نفرض ان عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من منتج 1 = X_1.

نفرض ان عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من منتج 2 = X_2.

نفرض ان عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من منتج 3 = X_3.

ان عدد الوحدات X_1, X_2, X_3 من الممكن ان تكون سالبة وهذا لا يمكن منطقيا حيث ان عدد الوحدات التي سيتم انتاجها اما ان تنتج بأي مقدار او ان لا تنتج نهائيا فتكون قيمتها صفر، يوضح شرط عدم السلبية وهو:

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

ثانيا: القيود:

القيد الأول (قيد العملية الأولى) ان اقصى زمن متاح للعملية 420 دقيقة يوميا (ليس بالضرورة استغلال كامل الزمن المتاح).

وحيث ان الوحدة الواحدة من المنتج الاول يحتاج تصنيعها العملية الاولى 2 دقيقة بينما الوحدة الواحدة من المنتج الثاني يحتاج 2 دقيقة، والوحدة الواحدة من المنتج الثالث يحتاج الى 3 دقائق. وبالتالي يمكن صياغة القيد الأول كما يلي:

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 420$$

القيد الثاني (قيد العملية الثانية): ان اقصى زمن متاح للعملية الثانية 440 دقيقة يوميا، وان الوحدة الواحدة من المنتج الاول يحتاج تصنيع في العملية الثانية 5 دقائق، في حين الوحدة الواحدة من المنتج الثاني لا يتطلب العملية الانتاجية الثانية(0)، اما الوحدة الواحدة من المنتج الثالث فتحتاج 4 دقائق لذلك فإن القيد الثاني سيكون كما يلي:

$$5X_1 + 4X_3 \leq 440$$

القيد الثالث (قيد العملية الثالثة) ان اقصى زمن متاح للعملية الثانية 456 دقيقة يوميا، وان الوحدة الواحدة من المنتج الاول يحتاج تصنيع في العملية الثالثة 3 دقائق، والوحدة الواحدة من المنتج الثاني تحتاج 6 دقائق في حين ان الوحدة الواحدة من المنتج الثالث لا يتطلب العملية الانتاجية الثالثة(0). لذلك فإن القيد الثالث سيكون كما يلي:

$$3X_1+6X_2 \leq 465$$

ثالثا: دالة الهدف: هدف صاحب القرار في هذه المشكلة هو تحقيق اكبر ربح ممكن Maximum Profit وتأخذ دالة الهدف الشكل الآتي:

$$\text{Maximize } Z = 5X_1 + 4X_2 + 7X_3$$

يتضح ان النموذج الرياضي للمشكلة يحقق جميع شروط نموذج البرمجة الخطية ويأخذ الشكل الآتي:

$$\text{Maximize } Z = 5X_1 + 4X_2 + 7X_3$$

S. t.

$$\begin{aligned} 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 &\leq 420 \\ 5X_1 + \quad 4X_3 &\leq 440 \\ 3X_1 + 6X_2 \quad &\leq 465 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

مثال (2):

مزرعة تقوم بتسمين الدواجن لتسويقها بعد 8 اسابيع من تاريخ التسمين ولديها 20000 دجاجة. يرغب صاحب القرار في المزرعة تحديد الكميات المطلوبة من المواد الغذائية المختلفة للتسمين في 8 اسابيع بحيث تكون تكلفة التغذية اقل ما يمكن. من الخبرة يتضح ان متوسط استهلاك الدجاجة يصل الى 455 غرام تقريبا من خليط من المواد الغذائية، وسوف نعتبر 455 غرام كوحدة عبوة للمواد الغذائية. ولكي تصل الدجاجة الى الوزن المحدد لها في 8 اسابيع فإن التغذية يجب ان تتضمن العناصر (كالسيوم، بروتين، الياف). الجدول الآتي يعطي كمية العناصر من المواد الغذائية المحددة وتكلفة وحدة العبوة من كل مادة.

المواد الغذائية	كمية العنصر في وحدة العبوة من المواد الغذائية			تكلفة وحدة من العبوة
	الكالسيوم	البروتين	الالياف	
الحجر الجيري	0.38	–	–	0.04
الحبوب (قمح، ذرة)	0.001	0.09	0.02	0.15
فول الصويا	0.002	0.50	0.08	0.40

حيث ان الوجبة الغذائية للدجاجة يجب ان تحتوي على:

1. لا يزيد الكالسيوم فيها عن 1.2% ولا يقل عن 0.8%
2. لا يقل البروتين عن 22%
3. لا تزيد الياف عن 5%

Example (2)

Farm is fattening chickens for the purpose of marketing after 8 weeks from the date of fattening, and has 20,000 chickens. And he wants the farm owner determine the required quantities of various food for fattening in 8 weeks so that the cost of feeding less as possible. And the

experience is clear that the average consumption of chicken up to 455 grams almost a mixture of food, and to reach the chicken to the weight specified in the 8 weeks should include the elements (calcium, protein, fiber). The following table gives the quantity of items from the food and the specific unit cost of the package of each article.

Types of food	The quantity of the element in the unit packaging of food types			Unit cost of the package
	calcium	protein	fiber	
A limestone	0.38	-	-	0.04
Grains (wheat, corn)	0.001	0.09	0.02	0.15
Soybean	0.002	0.50	0.08	0.40

Since the meal of the chicken must contain:

1. The calcium no more than 1.2% and not less than 0.8%.
2. At least 22% protein.
3. Not more than 5% of fiber.

الحـــــل: **Solution :**

اولا: المتغيرات القرارية: نفرض عدد العبوات المطلوبة من الحجر الجيري X_1 وعدد العبوات من الحبوب X_2 ومن فول الصويا X_3.

ثانيا: القيود: بما ان الحاجة تحتاج الى عبوة واحدة في المتوسط، فإن الكمية المطلوبة من المواد الغذائية يجب ان تحقق القيد التالي:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 20000$$

بالنسبة للكالسيوم يجب ان يحقق القيدين

$$0.38X_1+0.001X_2+0.002X_3 \geq 0.008(X_1+X_2+X_3)$$
$$0.38X_1+0.001X_2+0.002X_3 \leq 0.012(X_1+X_2+X_3)$$

وبالنسبة للبروتين

$0.09X_2+0.50X_3 \geq 0.22(X_1+X_2+X_3)$

وبالنسبة للالياف

$0.02X_2+0.08X_3 \leq 0.05(X_1+X_2+X_3)$

ثالثا: دالة الهدف: هدف صاحب القرار في هذه المشكلة هو تحقيق اقل كلفة ممكنة Minimum Cost وتأخذ دالة الهدف الشكل الآتي:

$\text{Min } Z = 0.04X_1 + 0.15X_2 + 0.40X_3$

1 -3 صيغ نماذج البرمجة الخطية

Forms of Linear programming Models

ان البرمجة الخطية تعتبر احدى نماذج البرمجة الرياضية التي تعالج مسألة تخصيص او توزيع الموارد او الطاقات المحدودة لتحقيق هدف معين، ويعبر عن هذا الهدف بدالة تسمى دالة الهدف Objective Function ويرمز لها بالرمز (Z)، وتكون بنوعين اما (Max) وتأتي عندما تهدف المنظمة الى تعظيم الارباح او (Min) وتأتي عندما تهدف المنظمة الى تقليل التكاليف، وتخضع هذه الدالة الى محددات او شروط او قيود Constraints والتي هي عبارة عن متباينات تعبر عن المواد الاولية، ساعات العمل، طاقات المكائن، الطاقة الكهربائية، الايدي العاملة...الخ)، وكذلك قيود عدم السلبية والتي تعبر عن كون جميع متغيرات النموذج الرياضي عبارة عن قيم موجبة او صفرية ولا يمكن ان تكون قيم سالبة، ويأتي نموذج البرمجة الخطية بثلاث صيغ هي:

1-3-1 الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

General Form of Linear Programming Model:

لو نظرنا الى نموذج البرمجة الخطية الذي تم بناؤه او تمت صياغته في التمارين التي تم استعراضها سابقا والتي تم بناءها اعتمادا على المشاكل المبينة في تلك التمارين نجد ان هذه النماذج جميعها بالصيغة العامة General Form ، وان نموذج البرمجة الخطية بشكل عام يتكون من:

1: المتغيرات: Variables.

2: العلامات: وهي:

$\leq$ اصغر او يساوي Less than or equal

≥ اكبر او يساوي More than or equal

〉 اصغر من . Less than

〈 اكبر من. More than

= يساوي Equal

3: معاملات المتغيرات: Variables Parameters

4: دالة الهدف (Z) : Objective Function

5: القيود Constraints

6: قيود عدم السلبية : Non- Negative Constraints

7: S.T: وتعني Subject to استنادا الى (أي ان المنشأة تسعى الى تحقيق الهدف المبين في الدالة الخطية (دالة الهدف Z) استنادا الى الشروط او القيود التالية.

وعليه تكون الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية كما يلي:

الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

$$\begin{array}{l} Max \\ or \quad Z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + \ldots + C_nx_n \\ Min \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n \leq,=,\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n \leq,=,\geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_{33}x_3 + \ldots a_{3n}x_n \leq,=,\geq b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_mx + \ldots + a_{mn}x_n \leq,=,\geq b_m \\ x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \geq 0 \end{array}$$

ان هذه الصيغة هي الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية، ولو امعنا النظر اليها نجد ان (a, b, c) ثوابت، وان (X_{ij}) متغيرات.

ويمكن اختصار الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية كما يلي:

الصيغة المختصرة للصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

$$Max \quad or \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad Min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq = \geq b_i$$

$$j = 1, 2, 3.....n$$

$$i = 1, 2, 3.....m$$

$$x_j \geq 0$$

1-3-2 الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية

Canonical Form of Linear Programming Model:

ان الفرق بين الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية والصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية يتمثل بما يلي:

1: دالة الهدف (Z) في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تكون اما من نوع (Max) او من نوع (Min) بينما تكون في الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية من نوع (Max) فقط.

2: علامات القيود في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تكون (≥ ، =، ≤)، بينما تكون في الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية اصغر و يساوي (≤) فقط.

اما مكونات نموذج البرمجة الخطية هي نفسها بالصيغتين العامة والقانونية وكما يلي:

الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية

$$\text{Max} \quad Z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + \ldots + C_nx_n$$

s . t

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_{13}x_3 + \ \ldots \ a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_{23}x_3 + \ \ldots \ a_{2n}x_n \le b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_{33}x_3 + \ \ldots \ a_{3n}x_n \le b_3 \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_m x \ + \ \ldots \ + a_{mn}x_n \le b_m \\
&x_1, x_2, x_3, \ \ldots \ x_n \ge 0
\end{aligned}$$

ويمكن اختصار الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية كما يلي:

الصيغة المختصرة للصيغة القانونية البرمجة الخطية

$$Max \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots\ldots m$$

$$j = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$$X_j \ge 0$$

وتستخدم الصيغة القانونية في بعض الحالات الخاصة لنماذج البرمجة الخطية.اذ يمكن تحويل الصيغة العامة الى الصيغة القانونية بأستخدام القواعد التالية:

1-يمكن تحويل التصغير (Minimized) لدالة الهدف الى تعظيم (Maximized) وبالعكس بضرب دالة الهدف بـ (1-) .

2-يمكن تحويل قيد اكبر من او يساوي ≥ الى اصغر من او يساوي ≤ بضرب طرفي المتباينة بـ (1-).

3-يمكن تحويل قيد المساواة الى قيدين الاول اصغر من او يساوي ≤ والثاني اكبر من او يساوي ≥ ثم تحويل الثاني بأستخدام القاعدة (2) اعلاه.

4-يمكن تحويل قيد القيمة المطلقة (Absolute Value) الى قيدين من نوع اصغر من او يساوي ≤ .

1 -3 – 3 : الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية
Standard Form of Linear Programming Model:

ان الفرق بين الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية والصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية يتمثل بما يلي:

1-دالة الهدف (Z) في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطي تكون اما من نوع (Max) او من نوع (Min)،وكذلك تكون في الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية.

2-علامات القيود في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تكون (≥ ، =، ≤)، بينما تكون في الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية يساوي (=) فقط بعد أضافة المتغيرات الوهمية Slack Variables غير سالبة ويرمز لها بالرمز($S_i \geq 0$) وتكون بشكل(S+) عندما تكون اشارة المتباينة اصغر من او يساوي ≤ , (S−) عندما تكون اشارة المتباينة اكبر من او يساوي ≥ ولا نضيف شيْ في حالةالمساواة (=) .

3-الطرف الايمن للقيود يكون غير سالب ($b_i \geq 0$).

وعلى ضوء ذلك تكون الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية كما يلي:

$$Max\, Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots c_nx_n + 0s_1 + 0s_2 + \ldots + 0s_m$$

s . t

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots \quad a_{1n}x_n + S_1 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots \quad a_{2n}x_n + S_2 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots \quad a_{3n}x_n + S_3 &= b_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n + S_m &= b_m
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \geq 0$$

$$S_1, S_2, S_3, \ldots S_m \geq 0$$

ويمكن اختصار الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية كما يلي:

الصيغة المختصرة للصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية

$$Max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0.S_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + 0.S_i = b_i$$

$$i = 1, 2, 3.....m$$

$$j = 1, 2, 3.....n$$

$$x_j \geq 0$$

$$S_i \geq 0$$

مثال (3) :

حول نموذج البرمجة الخطية الاتي الى: أ) الصيغة القانونية ب) الصيغة القياسية؟

$$Min\ Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$S.t$$

$$3X_1 - X_2 \leq 8$$

$$-5X_1 + 2X_2 \geq 3$$

$$4X_1 - X_2 = 6$$

$$|X_1 - X_2| \leq 10$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Example 3: Transfer the G. L. P model to: A) Canonical form? B)Standard form ?

$$Min\ Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$S.t$$

$$3X_1 - X_2 \leq 8 \quad ..1$$

$$-5X_1 + 2X_2 \geq 3 \quad ..2$$

$$4X_1 - X_2 = 6 \quad ..3$$

$$|X_1 - X_2| \leq 10 \quad ..4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحـــــل: **Solution :**

أ) الصيغة القانونية Canonical form

1-ان دالة الهدف يجب ان تكون من نوع (Maximized) عن طريق ضرب دالة الهدف بـ (1-) لتصبح $Max\ -Z=-2X_1-4X_2$

.

2-القيود : يبقى القيد الاول على ما هو عليه لأن اشارته اصغر من او يساوي , القيد الثاني يضرب بـ (1-) لأن اشارته اكبر من او يساوي , القيد الثالث يتحول الى قيدين احدهما (6 ≤) والاخر (6 ≥) ثم نضربه بـ (1-) لغرض تحويله الى اصغر من او يساوي , القيد الرابع ايضا يتحول الى قيدين احدهما (10 ≤) والاخر (10- ≥) ثم نضربه بـ (1-) لغرض تحويله الى اصغر من او يساوي. وبذلك يصبح لدينا ستة (6) قيود, اي ان نموذج الصيغة القانونية يكون كما يلي:

$$Max-Z=-2X_1-4X_2$$

S.t

$$\begin{aligned}
3X_1 - X_2 &\le 8 && ..1\\
+5X_1 - 2X_2 &\le -3 && ..2\\
4X_1 - X_2 &\le 6 && ..3\\
-4X_1 + X_2 &\le -6 && ..4\\
X_1 - X_2 &\le 10 && ..5\\
-X_1 + X_2 &\le 10 && ..6\\
X_1 , X_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

ب)الصيغة القياسية Standard form

1- تكون دالة الهدف من نوع (Min) وكما موجودة في السؤال .

2- القيود : نضيف الى القيد الاول (S_1+) لأن اشارته اصغر من او يساوي ونحول اشارة القيد الى(=) , القيد الثاني نضيف له (S_2-) لأن اشارته اكبر من او يساوي ونحول اشارة القيد الى(=) , القيد الثالث يبقى كما هو لأن اشارته (=) , القيد الرابع ايضا يتحول الى قيدين احدهما (10 ≤) ونضيف له (S_3+) والاخر (10- ≥) ثم نضربه بـ (1-) لغرض تحويله الى اصغر من او يساوي ونضيف له (S_4+). وبذلك تصبح خمسة قيود في الصيغة القياسية وكما يلي :

$$Min\ Z = 2X_1 + 4X_2$$

S.t

$$\begin{aligned}
3X_1 - X_2 + s_1 &= 8 \quad \dots 1 \\
-5X_1 + 2X_2 - s_2 &= 3 \quad \dots 2 \\
4X_1 - X_2 + &= 6 \quad \dots 3 \\
X_1 - X_2 + s_3 &= 10 \quad \dots 4 \\
-X_1 + X_2 + s_4 &= 10 \quad \dots 5
\end{aligned}$$

$$X_1 , X_2 , s_1 , s_2 , s_3 , s_4 \geq 0$$

اسئلة وتمارين عامة

1-تنتج إحدى الموسسات الكيمياوية نوعين من المحاليل الكيمياوية يستدعي مرور كل منها بثلاثة أقسام إنتاجية على التوالي لغرض إن تتضمن الوقت اللازم في كل قسم إنتاجي وربح منتج كما في الجدول أدناه :-

احسب كمية الإنتاج الممكنة في كل محلول بحيث تحقق أعلى ربح ممكن :-

نوع المنتج	الأقسام ألإنتاجية			ربح / ساعة
	1	2	3	
A	10	6	5.4	9
B	5	6	18	7
الساعات المتاحة لكل قسم	50	36	81	

2-تقوم إحدى مصانع النجارة بإنتاج الكراسي والمناضد بحيث إن كل نوع من هذه المنتجات تحتاج إلى المواد الأولية التالية , وان كلفة كل منتج تختلف عن الأخرى ومن بيانات الجدول أدناه حدد النموذج الأمثل للإنتاج بحيث تكون التكاليف أقل مايمكن ؟

نوع المواد الأولية	الكراسي	المناضد	الاحتياجات الأسبوعية
I	2	3	12
II	1	1	25
ساعات العمل	5	3	90
كلفة الوحدة الواحدة	40	3	

3-مصنع ينتج منتج معين يتكون من مركبين , وزن هذا المنتج 900 غرام . علما بأن المصنع يحتاج من المركب الاول كمية لاتزيد عن 80 غرام ومن المركب الثاني كمية لاتقل عن 60 غرام .وأن كلفة الغرام الواحد من المركب الاول ثلاثة دنانير ومن المركب

الثاني 8 دنانير .أكتب نموذج برمجة خطية يحدد الوزن الامثل لكل مركب من المركبات ويعطي أدنى التكاليف ؟.

4-يقوم مصنع بإنتاج الفحم الحجري بمواصفات معينة تقتضي احتواه على ما لايزيد عن 0.05 من الفسفور و 4.25 من الرماد وحسب الجدول ادناه .ويبين وجود ثلاثة أصناف من الفحم الحجري ونسب الفسفور والرماد لكل صنف من الاصناف وكذلك الكلف لكل منهم . والمطلوب أيجاد نسبة المزيج الأفضل للأصناف الثلاثة من الفحم الحجري بحيث تكون كلفته أقل ما يمكن ؟

الصنف	نسبة الفسفور %	نسبة الرماد %	الكلفة دينار/طن
A	0.08	3	20
B	0.05	5	15
C	0.03	4	10

Exercises for Linear Programming

1 - Establishments producing one of the two types of chemical solutions, chemical requires the passage of each three sections productivity respectively for the purpose that includes the time required in each section and a productive profit producer, as in the table below: - Calculate the quantity of production in every possible solution to achieving the highest (Maximum) possible profit :-

Product Type	Forums productivity	Profit / hour

	1	2	3	
A	10	6	5.4	9
B	5	6	18	7
Hours available In each section	50	36	81	

2 - one of the factories producing carpentry chairs and tables so that each type of these products need to be following raw materials, and that the cost of each product is different from the other data in the table below, and select the optimal model of production so that costs will be minimum.?

the type of raw materials	chairs	Desks	the weekly needs
I	2	3	12
II	1	1	25
Working hours	5	3	90
The cost per unit	40	3	

3- factory produces a product consists of two compounds, the weight of this product is 900 grams. Note that the factory needs of the boat the first amount of not more than 80 g and the second compound the amount of not less than 60 grams. And the cost per gram of the compound first three dinars and compound II 8 dinars. Write programming model written The weight optimized for each of the compounds and gives a minimum cost ?.

4- The factory production of coal specifications of certain require being overwhelmed what to not exceeding 0.05 phosphorus and 4.25 of ash, according to the table below. Shows the existence of three types of coal and percentage phosphorus and ash of each item as well as the costs for each of them. And find the desired mix ratio is better for the three varieties of coal so that cost as little as possible?

Category	Phosphorus %	ash %	The cost I.D / ton
A	0.08	3	20
B	0.05	5	15
C	0.03	4	10

الفصل الثاني

طرق حل نماذج البرمجة الخطية

Solution Methods of Linear Programming Models

2−1 المقدمة Introduction

2−2 الطريقة البيانية The Graphical Method

2− 3 الطريقة الجبرية The Algebraic Method:

2−4 الطريقة المبسطة The Simplex method:

2−5 حل نموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة تقليل دالة الهدف (Z):

Solution of (L.P) Model with Minimization Objective Function .

2-5-1 طريقة (آم) الكبرى The (Big-M) method

2-5-2 طريقة ذات المرحلتين Two- Phase Method

الفصل الثاني

طرق حل نماذج البرمجة الخطية

Solution Methods of Linear Programming Models

2-1 المقدمة Introduction

يحتل موضوع البرمجة الخطية في وقتنا الحاضر مركزاً متميزاً في مجال بحوث العمليات (Operations Research)، ويعد من المواضيع الأكثر شيوعاً واستخداماً للوصول إلى تحقيق الأمثلية (Optimality).

وتكمن أهمية نماذج البرمجة الخطية في كونها إحدى الوسائل المهمة في دراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة (Systems)، وكذلك كونها من أبسط وأسهل أنواع النماذج الرياضية التي تستخدم في معالجة مشاكل البرمجة الصناعية والحكومية الكبرى.

وتعرف البرمجة الخطية، على إنها:

1. أسلوب رياضي يستهدف الوصول إلى تحقيق الأمثلية من خلال عدة طرق ممكنة للموارد المتاحة.
2. أو هي أسلوب رياضي يوظف لتوزيع الموارد والإمكانات المحدودة (المتاحة) ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة، وصولاً إلى تحقيق الأمثلية في التوزيع.

وتأسيساً على ما تقدم، فقد شاع استخدام نماذج البرمجة الخطية من قبل مدراء المشاريع والمنشآت الإنتاجية، بهدف الوصول إلى تحقيق:

أ. أقصى (Max) مستوى للأرباح.

ب. أدنى (Min) مستوى للتكاليف.

من جانب آخر، تم استخدام نماذج البرمجة الخطية، في المجالات الآتية:

1. تخطيط الاستثمارات.
2. تخطيط الإنتاج.
3. تخطيط المخزون.
4. حل مشاكل النقل.
5. حل مشاكل التخصيص.
6. حل نظرية الألعاب.

وللوصول إلى حل نماذج البرمجة الخطية، تم استخدام الطرق الآتية:

1. الطريقة البيانية Graphical Method.

2. الطريقة الجبرية Algebraic Method.

3. الطريقة المبسطة Simplex Method.

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لكل طريقة من الطرق أعلاه، وعلى النحو الآتي:

2-2 الطريقة البيانية The Graphical Method

تعد الطريقة البيانية من الطرق المهمة في حل نموذج البرمجة الخطية، وتصلح هذه الطريقة عندما يحتوي النموذج على متغيرين فقط هما (X_1 , X_2)، ولحل نموذج البرمجة الخطية بموجبها، نتبع الخطوات الآتية:

1. رسم قيود النموذج على هيئة خطوط مستقيمة.
2. تحديد زوايا منطقة الحل الممكن (Feasible Solution) بيانياً.
3. إيجاد قيم زوايا منطقة الحل الممكن.
4. تحديد نقطة الحل الأمثل (Optimal Solution Point).

مثال (1):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، باستخدام الطريقة البيانية.

Example 1:

Find the optimal solution for (LP) model by using graphical method?

Max. $Z= 3X_1+5X_2$

Subject to:

$2X_1+3X_2 \leq 30$

$5X_1+4X_2 \leq 60$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

$2X_1+3X_2= 30$, $2X_1+3X_2 <30$ القيد الأول(يهمل)

$2X_1+3X_2 = 30$

If $X_1=0$, $3X_2=30$, $X_2=15$ $P_1(0,10)$ النقطة الأولى

If $X_2=0$ $2X_1=30$ $X_1=15$ $P_2(15,0)$النقطة الثانية

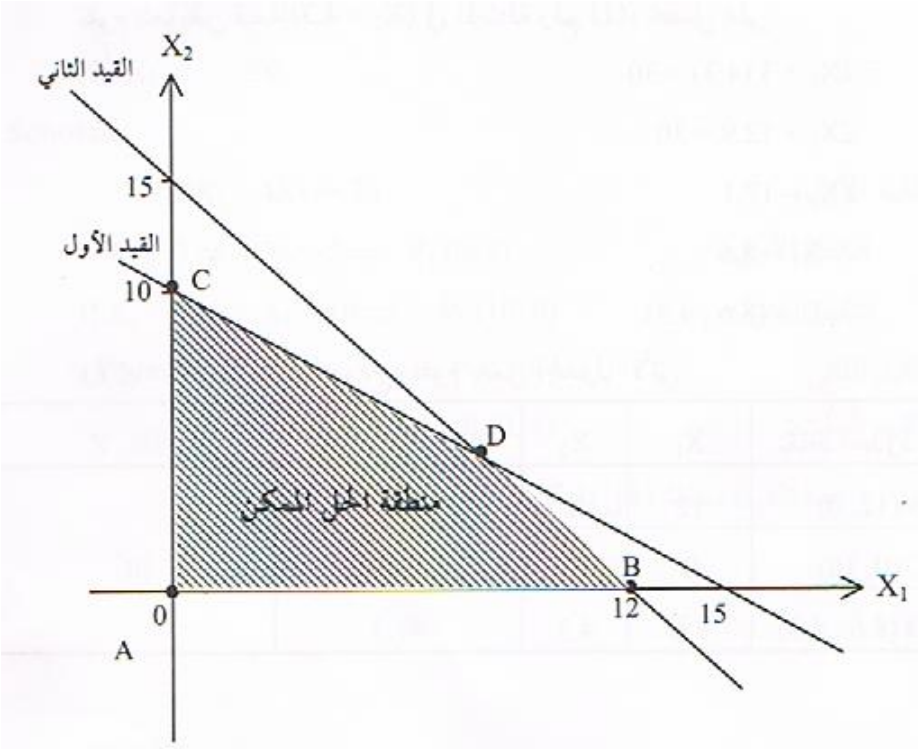
$5X_1+4X_2= 60$, $5X_1+4X_2 < 60$ القيد الثاني: (يهمل)

$5X_1+4X_2= 60$

If $X_1=0$ $4X_2=60$ $X_2=15$ $P_1(0,15)$ النقطة الأولى

If $X_2=0$ $5X_1=60$ $X_1=12$ $P_2(12,0)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:



من الشكل البياني السابق، يتضح بأن من منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (D,C,B,A)، إذ إن:

A= (0,0) , B= (12,0) , C= (0,10)

ولإيجاد إحداثيات النقطة (D)، نقوم بتقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي إن:

نضرب ب (5) (1) ……. $(2X_1+3X_2= 30)$

نضرب ب (2) (2)…….$(5X_1+4X_2= 60)$

$10X_1+15X_2= 150$…… (3)

$\mp 10X_1 \mp 8X_2 = \mp 120$….(4)

بالطرح $7X_2= 30$

$X_2= 4.3$

نقوم بتعويض قيمة ($X_2= 4.3$) في المعادلة رقم (1)، نحصل على:

$2X_1+3(4.3) = 30$

$2X_1+12.9= 30$

$2X_1 = 17.1$
$X_1 = 8.6$
D= (8.6, 4.3)

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

نقاط الحدود	X_1	X_2	$Z = 3X_1 + 5X_2$	Max. Z
B (12, 0)	12	0	36	
C (0, 10)	0	10	50	50*
D (8.6 , 4.3)	8.6	4.3	47.3	

عليه فإن الحل الأمثل للنموذج، يكون:

$X_1 = 0, X_2 = 10, Z^* = 50$

مثال (2):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانياً:

Example 2: Find the optimal solution for (LP) model using graphical method

Max. $Z = 6X_1+4X_2$

Subject to:

$2X_1+2X_2 \le 20$

$5X_1 \le 25$

$5X_2 \le 20$

$X_1 , X_2 \ge 0$

$2X_1+2X_2 = 20$ القيد الأول

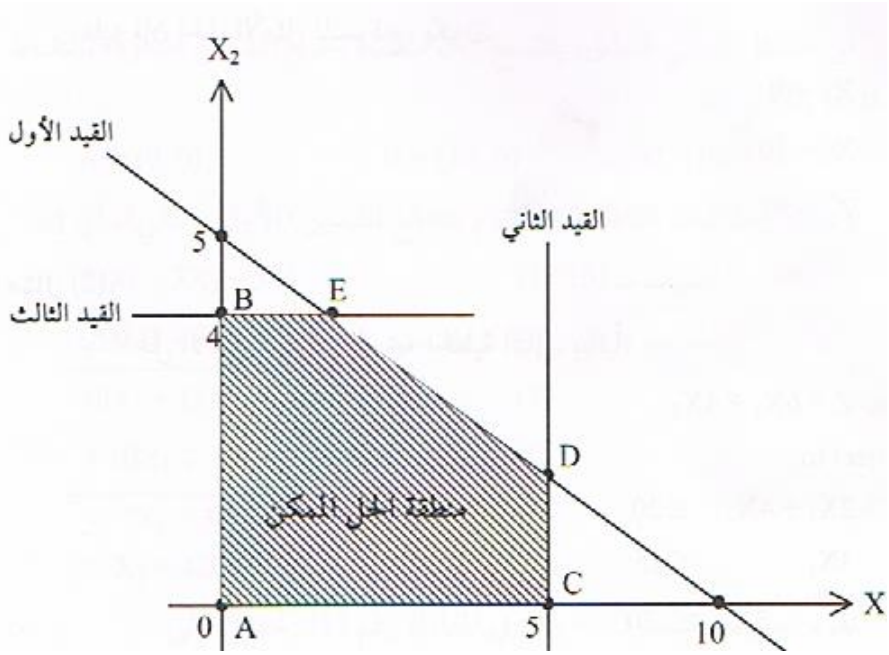
If $X_1=0$, $2X_2=20$, $X_2=10$ $P_1(0,10)$ النقطة الأولى

If $X_2=0$, $2X_1=20$ $X_1=10$ $P_2(10,0)$ النقطة الثانية

$5X_1 = 25$, $X_1=5$ $P(5,0)$ القيد الثاني:

$5X_2=20$, $X_2=4$, $P(0,4)$ القيد الثالث

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:



مـن الشـكل البيـاني السـابق، يتضـح بـأن مـن منطقـة الحـل الممكـن محـدودة بالنقـاط (E,D,C,B,A)، إذ إن:

A= (0,0) , B= (0,4) , C= (5, 0)

ولإيجاد إحداثيات النقطة (E,D)، نتبع الآتي:

أ. نحصل على النقطة (D)، من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي إن:

$2X_1+4X_2 = 20$…….(1)

$3X_1 = 15$……. (2)

من المعادلة (2) نحصل على ($X_1= 5$)، نقوم بتعويضها في المعادلة (1)، نحصل على:

$2(5)+4X_2 = 20$

$4X_2= 10$

$X_2= 2.5$

D= (5,2.5)

ب. نحصل على النقطة (E)، من تقاطع القيدين (الأول والثالث)، أي إن:

$2X_1+4X_2 = 20$…….(1)

$5X_2 = 20$…….(2)

من المعادلة (2) نحصل على ($X_2= 4$)، نقوم بتعويضها في المعادلة (1)، ينتج:

$2X_1+4(4) = 20$
$2X_1= 2$
$X_1= 2$
$E= (2,4)$

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

نقاط الحدود	X_1	X_2	$Z = 6X_1 + 4X_2$	Max. Z
B (0,4)	0	4	16	
C (5,0)	5	0	30	40^*
D (5,2.5)	5	2.5	40	
E (2, 4)	2	4	28	

عليه فإن الحل الأمثل للنموذج، هو:

$X_1 = 5, X_2 = 2.5, Z^* = 40$

مثال (3):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانياً:

Example 3: Find the optimal solution for (LP) model by using graphical method

Min. $Z= 4X_1+3X_2$
Subject to:

$2X_1+2X_2 \leq 20$
$2X_1+5X_2 \geq 30$
$3X_2 \leq 27$
$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

القيد الأول $2X_1+2X_2= 20$

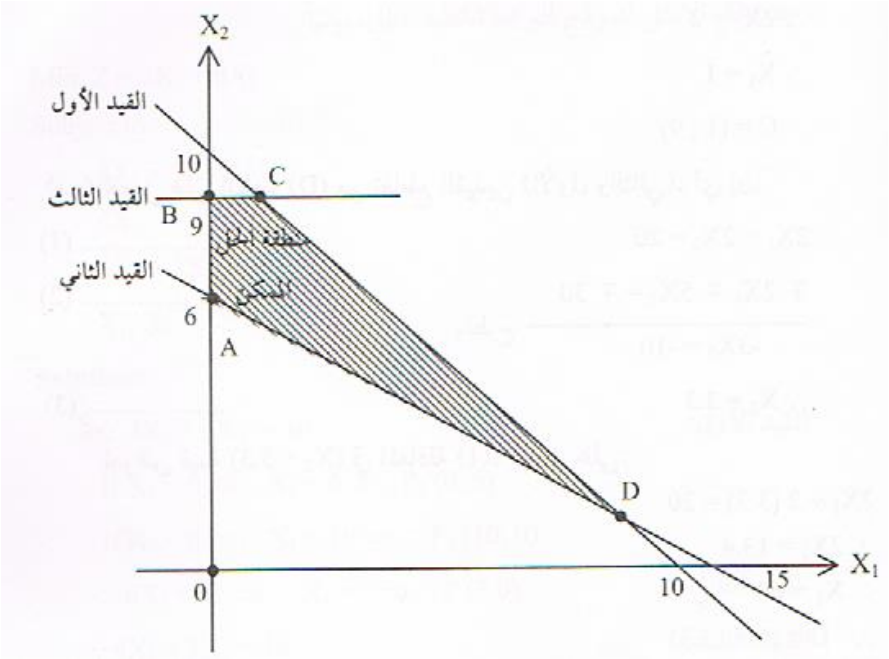
If $X_1=0,\ X_2=10\ P_1(0,10)$
If $X_2=0 , 2X_1=30\ X_1=10\ P_2(10,0)$

القيد الثاني: $2X_1+5X_2 = 30$

If $X_1=0\ X_2=6\ P_1(0,6)$
If $X_2=0\ X_1=15\ X_1=12\ P_2(15,0)$

القيد الثالث: $3X_2= 27\ X_2 = 9\ P= (0,9)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:



من الشكل البياني السابق، يتضح بأن من منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (C,B,A)، إذ إن:

A= (0,6), B= (0,9)

ولإيجاد إحداثيات النقطة (C)، نتبع الآتي:

أ.نحصل على النقطة (C)، من تقاطع القيدين (الأول والثالث)، أي إن:

$2X_1+2X_2 = 20$…….(1)

$3X_2 = 27$……. (2)

من المعادلة (2) نحصل على ($X_2= 9$)، نقوم بتعويضها في المعادلة (1)، ينتج:

$2X_1+ 2(9) = 20$

$2X_1 = 2$

$X_1= 1$

C= (1,9)

ب. نحصل على النقطة (D)، من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي إن:

$2X_1+2X_2 = 20$…….(1)

$\mp 2X_1 \mp 5X_2 = \mp 30$…… (2)

$-3X_2= -10$

$X_2= 3.3$…….. (3)

نعوض قيمة ($X_2= 3.3$) في المعادلة (1)، نحصل على:

$2X_1 + 2(3.3) = 20$
$2X_1 = 13.4$
$X_1 = 6.7$
D= (6.7, 3.3)

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

نقاط الحدود	X_1	X_2	$Z = 6X_1 + 4X_2$	Min. Z
A (0,6)	0	6	18	
B (0,9)	0	9	27	18*
C (1,9)	1	9	31	
D (6.7, 3.3)	6.7	3.3	36.7	

عليه فإن الحل الأمثل للنموذج، هو:

$X_1 = 0, X_2 = 6, Z^* = 18$

مثال (4):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانياً:

Example 4: Find the optimal solution for (LP) model by using graphical method

Min. $Z=3X_1+8X_2$
Subject to:

$3X_1+5X_2 \geq 30$
$6X_1 = 42$
$4X_1+3X_2 \leq 36$
$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

القيد الأول: $3X_1+5X_2= 30$

If $X_1=0$,, $X_2=6$ $P_1(0,6)$
If $X_2=0$, $X_1=10$ $P_2(10,0)$

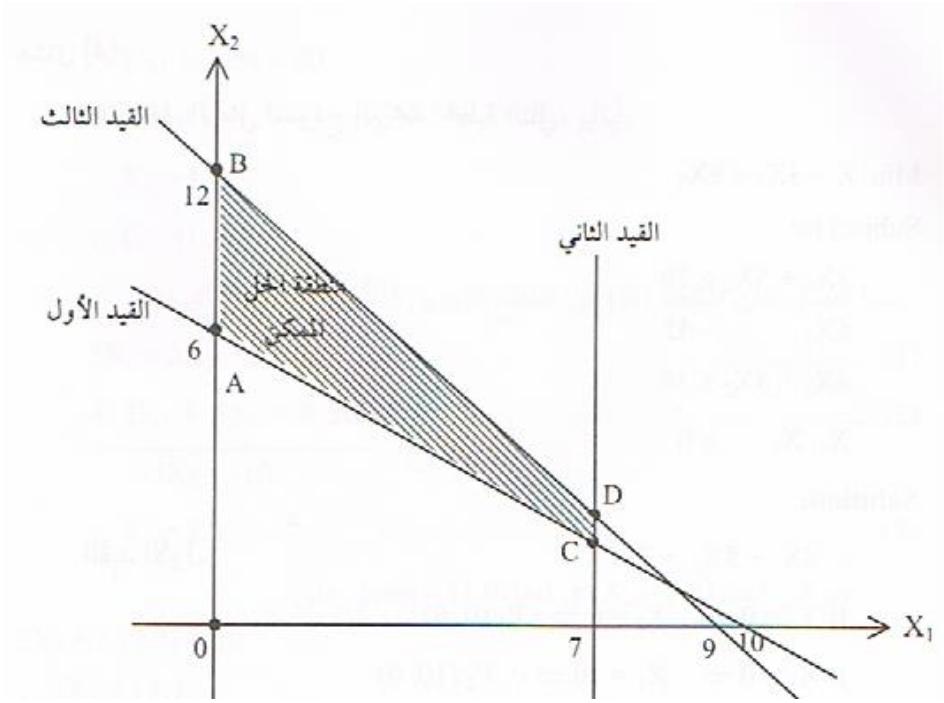
القيد الثاني: $6X_1= 42$, $X_1= 7$

القيد الثالث: $4X_1+3X_2= 36$

If $X_1=0$ $X_2=12$ $P_1(0,12)$

If $X_2=0$ $X_1=0$ $X_1=9$ $P_2(9,0)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:



مـــن الشـــكل البياني السابق، يتضح بأن من منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (D,C,B,A)، إذ إن:

A= (0,6), B= (0,12)

ولإيجاد إحداثيات النقاط (D,C)، نتبع الآتي:

أ.نحصل على النقطة (C)، من تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي إن:

$3X_1+5X_2 = 30$…….(1)

$6X = 42$……. (2)

من المعادلة (2) نحصل على ($X_1= 7$)، نقوم بتعويضها في المعادلة (1)، نحصل على:

$3(7)+ 5X_2 = 30$

$5X_2 = 9$

$X_2= 1.8$

C= (7,1.8)

ب. نحصل على النقطة (D)، من تقاطع القيدين (الثاني والثالث)، أي إن:

$6X_1 = 42$…….(1)

$4X1+3X2 = 36$…… (2)

$3X_2 = 8$
$X_2 = 2.7$…….. (3)
D= (7,2.7)

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

نقاط الحدود	X_1	X_2	$Z = 3X_1 + 8X_2$	Min. Z
A (0,6)	0	6	48	
B (0,12)	0	12	96	35.4^*
C (7, 1.8)	7	1.8	35.4	
D (7, 2.7)	7	2.7	42.6	

عليه فإن الحل الأمثل للنموذج، هو:

$X_1 = 7$
$X_2 = 1.8$
$Z^* = 35.4$

مثال (5):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، بيانياً:

Example 5: Find the optimal solution for (LP) model by using graphical method

Min. $Z = 3X_1+2X_2$

Subject to:

$4X_1+6X_2 \geq 12$

$8X_1+4X_2 \geq 16$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

القيد الأول $4X_1+6X_2 = 12$

If $X_1=0$, $X_2=2$ $P_1(0,2)$

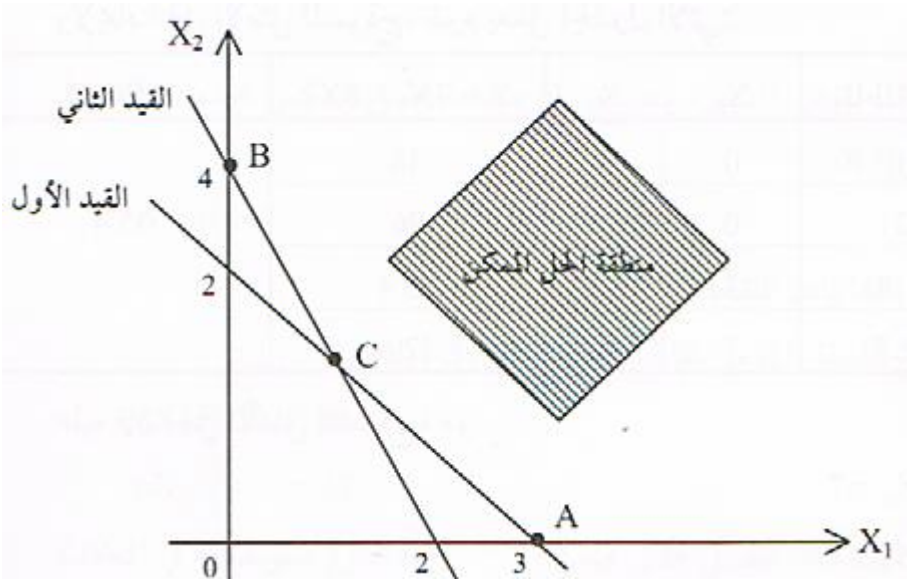
If $X_2=0$, $X_1=3$ $P_2(3,0)$

القيد الثاني: $8X_1+4X_2 = 16$

If $X_1=0$, $X_2=4$ $P_1(0,4)$

If $X_2=0$, $X_1=2$ $P_2(2,0)$

عليه تكون منطقة الحل الممكن، موضحة بالشكل البياني الآتي:



يتضح من الشكل البياني السابق، يتضح بأن من منطقة الحل الممكن محدودة بالنقاط (C,B,A) إذ إن:

A= (3,0), B= (0,4)

ولإيجاد إحداثيات النقاط (C)، يتم ذلك من خلال تقاطع القيدين (الأول والثاني)، أي إن:

$(4X_1+6X_2 = 12)$ (2) نضرب المعادلة ب .....(1)

$8X_1+4X_2 = 16$..... (2)

$8X_1+ 12X_2 = 24$

$\mp 8X_1 \mp 4X_2 = \mp 16$

بالطرح $8X_2= 8$

$X_2= 1$..... (3)

نعوض قيمة $(X_2= 1)$ في إحدى المعادلتين، ولتكن معادلة (1)، نحصل على:

$4X_1+6(1) = 12$

$4X_1= 6$

$X_1= 1.5$

C= (1.5, 1)

ولإيجاد الحل الأمثل للنموذج، نقوم بعمل الجدول الآتي:

نقاط الحدود	X_1	X_2	$Z = 3X_1 + 2X_2$	Min. Z
A (3.0)	3	0	9	
B (0,4)	0	4	8	6.5^*
C (1.5,1)	1.5	1	6.5	

عليه يكون الحل الأمثل كالآتي،

$X_1 = 1.5, X_2 = 1, Z^* = 6.5$

2- 3 الطريقة الجبرية The Algebraic Method:

تعد الطريقة الجبرية من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري للقم المتوقعة للمتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي وفقاً إلى عدد الطرق الممكنة لهذه القيم، وتستخدم هذه الطريقة عندما يحتوي النموذج على متغيرين فقط هما (X_1, X_2).

ولحل نموذج البرمجة الخطية بموجبها، نتبع الخطوات الآتية:

1. تقسيم متغيرات النموذج الرياضي، إلى نوعين هما:

أ. المتغيرات الأساسية (Basic Variables):

وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكلة، وتكون قيم هذه المتغيرات (اكبر من الصفر) دائماً، أي إن $(X_j>0, S_i>0)$.

ب. المتغيرات غير الأساسية (Non- Basic Variables):

وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكلة، وتكون قيم هذه المتغيرات (مساوية للصفر) دائماً، أي إن $(X_j=0, S_i=0)$.

2. تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية (Canonical Form) إلى الصيغة المستقرة (الصيغة القياسية) (Standard Form)، وذلك باستخدام المتغيرات الراكدة (Slack Variables) في دالة الهدف وقيود النموذج، وكآلاتي:

نوع علامة القيود	آلية استخدام المتغيرات الراكدة في القيود	آلية استخدام المتغيرات الراكدة في دالة الهدف	
		Max. Z	Min. Z
أقل أو يساوي (≤)	$+S_i$	$+0S_i$	$+0\ S_i$
أكبر أو يساوي (≥)	$-S_i$	$-0\ S_I$	$-0S_i$
يساوي (=)	/	/	/

3. عمل جدول يتضمن المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية، لغرض الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة بموجب الطريقة الجبرية.

مثال (6):

جد الحل الأمثل للنموذج التالي، باستخدام الطريقة الجبرية:

Example 6: Find the optimal solution for following (L.P) model using Algebraic method?

Max. $Z= 3X_1+5X_2$

Subject to:

$2X_1+3X_2 \leq 30$

$5X_1+4X_2 \leq 60$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

1. نقوم بتحويل النموذج الرياضي السابق من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

Max. $Z= 3X_1+5X_2 + 0S_1+ 0S_2$

Sub. to:

$2X_1+3X_2 +S_1= 30$

$5X_1+4X_2+ S_2 =60$

$X_1 , X_2 \geq 0, S_1, S_2 \geq 0$

2. تحديد عدد الحالات الممكنة لاختيار (2) متغيرين من (4) متغيرات، وفقاً للصيغة الآتية:

$$\therefore C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\therefore C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4(3)2!}{2(1)2!}$$

3. للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة باستخدام الطريقة الجبرية، نعمل الجدول الآتي:

عدد الحالات الممكنة	المتغيرات غير الأساسية $X_j = 0,\ S_i = 0$		المتغيرات الأساسية $X_j > 0,\ S_i > 0$		دالة الهدف $Z = 3X_1+5X_2+0S_1+0S_2$	Max. Z
1	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$S_1 = 30$	$S_2 = 60$	0	50^*
2	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$X_2 = 10$	$S_2 = 20$	50	
3	$X_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_2 = 15$	$S_1 = -15$	75 (تهمل)	
4	$X_2 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 15$	$S_2 = -15$	45 (تهمل)	
5	$X_2 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 12$	$S_1 = 6$	36	
6	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 8.6$	$X_1 = 4.3$	47.3	

الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$X_1 = 0$
$X_2 = 10$
$Z^* = 50$

مثال (7):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، جبرياً:

Example 7: Find the optimal solution for following (L.P) model using Algebraic method?

Max. $Z = 30X_1+18X_2$
Subject to:

$$X_1+2X_2 \le 200$$
$$3X_1+2X_2 \le 300$$
$$X_1 \le 100$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

Solution:

Max. $Z= 30X_1+18X_2 + 0S_1+ 0S_2+ S_3$

Subject to:

$X_1+2X_2+ S_1 = 200$

$3X_1+2X_2 + S_2 = 60$

$X_1 + S_3 = 100$

$X_1 , X_2 \geq 0, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

نقوم بتحديد عدد الحالات الممكنة، وفقاً للصيغة الآتية:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \Rightarrow C_2^5 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5(4)(3!)}{2(1)3!} = 10$$

أي إن عدد الحالات العشرة، هي:

$X_1X_2, X_1S_1, X_1S_2, X_1S_3, X_2S_1, X_2S_2, X_2S_3, S_1S_2, S_1S_3, S_2S_3$

وللوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة جبرياً، نعمل الجدول الآتي:

عدد الحالات	المتغيرات غير الأساسية $X_j = 0$, $S_i = 0$	المتغيرات الأساسية $X_j > 0$, $S_i > 0$	دالة الهدف $Z = 30X_1+18X_2+0S_1+0S_2+0S_3$	Max. Z
1	$X_1 = 0$ $X_2 = 0$	$S_1 = 200$ $S_2 = 300$ $S_3 = 100$	0	
2	$X_1 = 0$ $S_1 = 0$	$X_2 = 100$ $S_2 = 100$ $S_3 = 100$	1800	
3	$X_1 = 0$ $S_2 = 0$	$X_2 = 150$ $S_1 = -100$ $S_3 = 100$	يهمل (2700)	
4	$X_1 = 0$ $S_3 = 0$	$X_2 = 0$ $S_1 = 200$ $S_2 = 300$	0	
5	$X_2 = 0$ $S_1 = 0$	$X_1 = 200$ $S_2 = -300$ $S_3 = -100$	يهمل (6000)	3000^*
6	$X_2 = 0$ $S_2 = 0$	$X_1 = 100$ $S_1 = 100$ $S_3 = 0$	3000	
7	$X_2 = 0$ $S_3 = 0$	$X_1 = 100$ $S_1 = 100$ $S_2 = 0$	3000	
8	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$	$X_1 = 50$ $X_2 = 75$ $S_3 = 50$	2850	
9	$S_1 = 0$ $S_3 = 0$	$X_1 = 100$ $X_2 = 50$ $S_2 = -100$	يهمل (3900)	
10	$S_2 = 0$ $S_3 = 0$	$X_1 = 100$ $X_2 = 0$ $S_1 = 100$	3000	

عليه يكون الحل الأمثل للمشكلة، كالآتي:

$X_1 = 100, X_2 = 0, Z^* = 3000$

مثال (8):

جد الحل الأمثل للنموذج التالي، باستخدام الطريقة الجبرية:

Example 8: Find the optimal solution for following (L.P) model using Algebraic method?

Min. $Z= 3X_1+2X_2$

Subject to:

$4X_1+6X_2 \geq 12$

$8X_1+4X_2 \geq 16$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

نقوم بتحويل النموذج الرياضي أعلاه من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

Min. $Z= 3X_1+2X_2 – 0S_1-0S_2$

Subject to:

$4X_1+6X_2 –S_1 = 12$

$8X_1+4X_2 –S_2 = 16$

$X_1 , X_2 \geq 0, S_1, S_2 \geq 0$

للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة، نعم الجدول الآتي:

عدد الحالات الممكنة	المتغيرات غير الأساسية $X_j = 0$, $S_i = 0$	المتغيرات الأساسية $X_j > 0$, $S_i > 0$	دالة الهدف $Z = 3X_1+2X_2 - 0S_1 - 0S_2$	Max. Z
1	$X_1 = 0$ $X_2 = 0$	$S_1 = -12$ $S_2 = -16$	0 (تهمل)	
2	$X_1 = 0$ $S_1 = 0$	$X_2 = 2$ $S_2 = -8$	4 (تهمل)	
3	$X_1 = 0$ $S_2 = 0$	$X_2 = 4$ $S_1 = 12$	8	6.5^*
4	$X_2 = 0$ $S_1 = 0$	$X_1 = 3$ $S_2 = 8$	9	
5	$X_2 = 0$ $S_2 = 0$	$X_1 = 2$ $S_1 = -4$	6 (تهمل)	
6	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$	$X_1 = 1.5$ $X_2 = 1$	6.5	

الحل الأمثل للنموذج، يكون:

$X_1 = 1.5, X_2 = 1, Z^* = 6.5$

4-2 الطريقة المبسطة The Simplex method:

حل النموذج في حالة دالة الهدف من نوع تعظيم

Solution of (L.P) Model with Maximization Objective Function.

تعد الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) أسلوب رياضي متقدم في حل مشاكل البرمجة الخطية (LP). كونها تعالج المشاكل التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات (متغيرين فأكثر)، كما وتعد هذه الطريقة أفضل وأدق من الطريقتين السابقتين [الطريقة البيانية والطريقة الجبرية].

إن البدايات التاريخية لتطبيق الطريقة المبسطة (Simplex method)، تعود إلى الجهود المبذولة من قبل العالم (Dantzig) عام 1947، عندما تبين له عجز كل من الطريقة البيانية والطريقة الجبرية في معالجة مشاكل البرمجة الخطية (LP)، عندما تحتوي على أكثر من متغيرين.

لقد شاع استخدام الطريقة المبسطة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية (LP) في وقتنا الحاضر، نتيجة انتشار الحاسبات الالكترونية وتطور البرمجيات الجاهزة (Soft wares) المتعلقة بهذا النوع من المشاكل.

يتم إيجاد حل نماذج البرمجة الخطية (LP)، بموجب هذه الطريقة وفقاً إلى ثلاث مراحل أساسية ومتسلسلة، يمكن وصفها، على النحو الآتي:

1. المرحلة الأولى: إيجاد الحل الأساسي الممكن (الحل الأولي) (Feasible Solution).
2. المرحلة الثانية: تحسين الحل الأولي للحصول على الحل الأفضل (Best Solution).
3. المرحلة الثالثة: تحسين الحل الأفضل للحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution)، وقد يتم ذلك بمرحلة واحدة أو عدة مراحل.

أولاً: خطوات الحل بموجب الطريقة المبسطة في حالة تعظيم (Maximization) دالة الهدف (Z):

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP)، بموجب طريقة السمبلكس، نتبع الخطوات الآتية:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية (Canonical Form) إلى الصيغة القياسية (Standard Form)، بعد إضافة

المتغيرات الفائضة أو الراكدة إلى كل من دالة الهدف (Z) وقيود النموذج، مع مراعاة جعل دالة الهدف (Z) مساوية (للصفر).

2. تصميم جدول الحل الأساسي الممكن (Feasible Solution)، بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات (X_j ,S_i) في قيود النموذج، ودالة الهدف (Z).
3. تحديد المتغير الداخل (Entering Variable)، على أساس اكبر قيمة بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).
4. تحديد المتغير الخارج (Leaving Variable)، عن طريق قسمة القيم الواقعة في الجهة اليمنى في عمود (R.H.S)، على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري (Pivot Column) والمتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة من خوارج القسمة في عمود النسبة (Ratio) يعد هو المتغير الخارج، ليحل محله المتغير الداخل.
5. العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل، يسمى بالعمود المحوري (Pivot Column).
6. الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج، يسمى بالصف المحوري (Pivot Row).
7. العنصر الذي يقع تحت المتغير الداخل، وأمام المتغير الخارج يسمى بالعنصر المحوري (Pivot Column) بمعنى أخر [هو العنصر الناتج من تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج].
8. يمكن الحصول على المعادلة المحورية (Pivot Equation) من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري(Pivot Element).
9. لغرض تحسين الحل الممكن (Feasible Solution)، والحصول على الحل الأفضل (Best Solution) نتبع الآتي:

أ. إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة (New Z)، كالآتي:

معاملات (Z) الجديدة= معاملات (Z)– معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف * المعادلة المحورية.

ب. إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات (S_i)، كالآتي:

معاملات (S_i) الجديدة= معاملات (S_i) القديمة– معامل المتغير الداخل في صف (S_i) * المعادلة المحورية.

10. يمكن الحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution) لمشكلة التعظيم (Maximization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات (C_j دالة الهدف الجديدة في جدول الحل، أكبر من أو تساوي الصفر، أي إن ($C_j \geq 0$)، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات (C_j) في دالة الهدف (سالبة)، أي إن ($C_j < 0$)، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.
11. يعاد إجراء الخطوات السابقة من (3–10) حتى يتم الحصول على جميع معاملات (C_j) في دالة الهدف (Z)، اكبر من أو تساوي الصفر أي إن ($C_j \geq 0$)، مما يعني ذلك، تم الحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

مثال (9): جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام الطريقة المبسطة (Simplex method):

Example 9: Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

(Max. $Z= 30X_1+ 18X_2$

S.t. :

$$X_1+2X_2 \leq 200$$
$$3X_1+2X_2 \leq 300$$
$$X_1 \leq 150$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية (L.P) السابق، إلى الصيغة القياسية، وكالآتي:

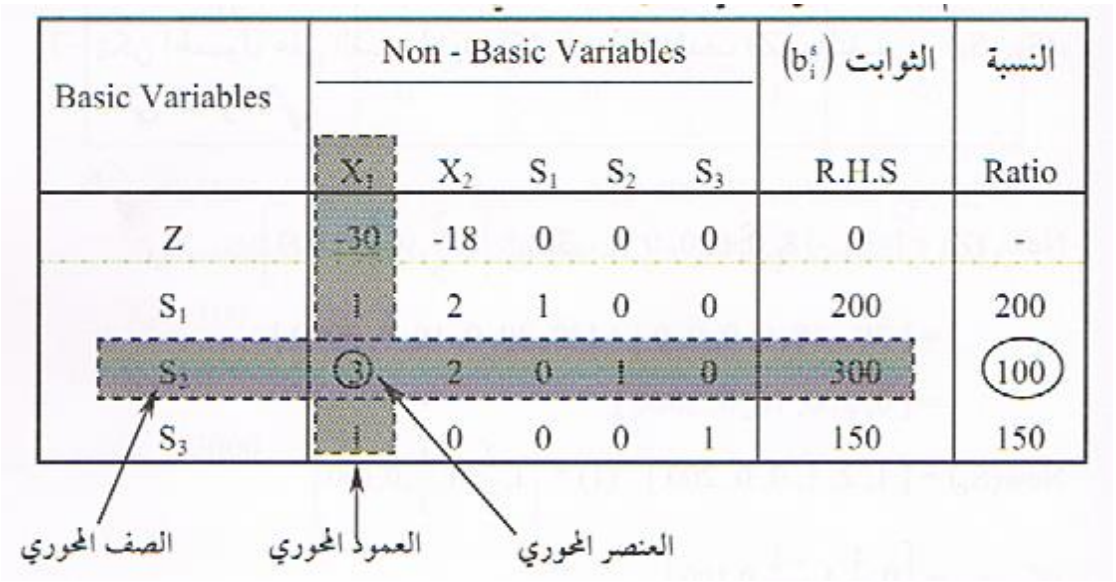
Max. $Z- 30X_1 -18X_2- oS_1- 0S_2- 0S_3= 0$

S.t. :

$$X_1+2X_2+S_1 = 200$$
$$3X_1+2X_2+ S_2 = 300$$
$$X_1+ S_3= 150$$

$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

2. تصميم جدول الحل الأولي، على النحو الآتي: Table 1



3. إن المتغير الداخل هو (X_1)، كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة (30) في صف دالة الهدف (Z).
4. إن المتغير الخارج هو (S_2)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (100) في عمود النسبة (Ratio).

ملاحظة: تهمل القيم السالبة (−) أو غير المعرفة (∞) في عمود النسبة (Ratio).

5. إن العنصر المحوري هو القيمة (3)، والتي يمكن الحصول عليها من تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري.
6. يمكن الحصول على المعادلة المحورية (Pivot Equation)، من خلال قسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري (3)، أي إن:

$$\text{Pivot equation}= \left[\frac{3}{3},\frac{2}{3},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{300}{3}\right]$$

$$= \left[1,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0,100\right]$$

7. يمكن الحصول على القيم الجديدة لكل من دالة الهدف (Z) والمتغيرين $(S_3, \ S_1)$، على النحو الآتي:

$$\text{New (Z)}= [-30, -18, 0,0,0,0]- (-30)* \left[1,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0,100\right]$$

= [-30, -18, 0,0,0,0] + [30,20,0,10,3000]

= [0,2,0,10,0,3000]

New (S_1) = [1,2,1,0,0,200] - (1)* $\left[1,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},100\right]$

= $\left[0,\frac{4}{3},1,\frac{-1}{3},0,100\right]$

New (S_3) = [1,0,0,0,1,150] - (1)* $\left[1,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},100\right]$

= $\left[0,-\frac{2}{3},0,\frac{-1}{3},1,50\right]$

نقوم بوضع النتائج السابقة في جدول حل ثاني، وعلى النحو الآتي:

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Variables					الثوابت (b_i^s)
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z^*	0	2	0	10	0	3000
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	100
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	100
S_3	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	50

8. بما إن جميع معاملات (C_j) دالة الهدف الجديدة (Z) في الجدول أعلاه، هي أكبر وتساوي الصفر، أي إن $(C_j \geq 0)$، عليه فإن الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$X_1 = 100, X_2 = 0, Z^* = 3000$

الاستنتاج:

من النتائج أعلاه، يتضح بأن إدارة المنشاة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (100) وحدة من المنتج (X_1)، وعدم إنتاج أي وحدة من المنتج (X_2)، وبما يحقق لها أقصى الأرباح بلغت (3000) ثلاثة ألاف دينار.

مثـال (10): جـد الحـل الأمثـل لنمـوذج البرمجـة الخطيـة (L.P) التـالي، باسـتخدام الطريقـة المبسطة:

Example 10: Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

Max. $Z= 3X_1+5X_2$

S. t. :

$$2X_1+3X_2 \leq 30$$
$$5X_1+4X_2 \leq 60$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

1. تحويل نموذج الخطة البرمجة الخطية السابق، إلى الصيغة القياسية، أي إن:

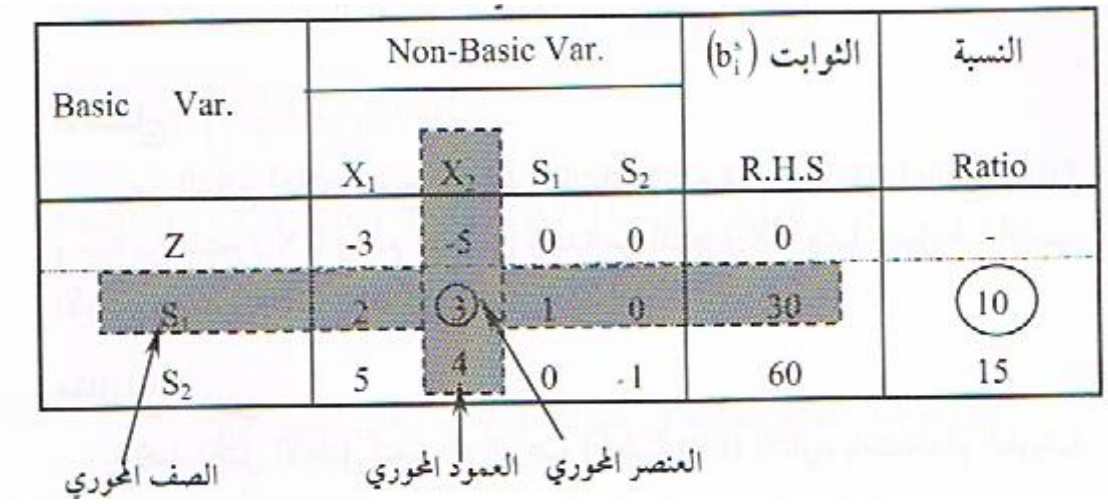
Max. $Z- 3X_1-5X_2+0S_1+0S_2= 0$

S.t. :

$$2X_1+3X_2+ S_1 = 30$$
$$5X_1+4X_2+ S_2 = 60$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

2. تصميم جدول الحل الأولي، على النحو الآتي:

Table 1



3. المتغير الداخل هو (X_2)، كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة (5) في صف دالة الهدف (Z).
4. المتغير الخارج هو (S_1)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (10) في عمود النسبة (Ratio).
5. العنصر المحوري هو القيمة (3).
6. يمكن الحصول على المعادلة المحور (Pivot Equation)، كالآتي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{30}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

7. يمكن الحصول على قيم (Z) و (S_2) الجديدتين، كالآتي:

$$\text{New (Z)} = [-3, -5, 0, 0, 0] - (-5) * \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

$$= [-3, -5, 0, 0, 0] + \left[\frac{10}{3}, 5, 0, 50\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 0, 50\right]$$

$$\text{New } (S_2) = [5, 4, 0, 1, 60] - 4 * \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

$$= [-3, -5, 0, 0, 0] + \left[\frac{10}{3}, 5, \frac{5}{3}, 0, 50\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 0, 50\right]$$

$$\text{New } (S_2) = [5,4,0,1,60] - 4^* \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$$

$$[5,4,0,1,60] - \left[\frac{8}{3}, 4, \frac{4}{3}, 0, 40\right]$$

$$= \left[\frac{7}{3}, 0, \frac{-4}{3}, 1, 20\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول حل ثاني، وعلى النحو الآتي:

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i^*)
	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z^*	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	50
X_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
S_2	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	20

8. بما إن جميع معاملات دالة الهدف الجديدة (Z) في الجدول أعلاه، هي أكبر من وتساوي الصفر، أي إن $(C_j \geq 0)$، عليه فإن الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$X_1 = 0, X_2 = 10, Z^* = 50$

الاستنتاج:

يتضح من النتائج أعلاه، بأن إدارة المنشاة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (10) وحدات من المنتج الثاني (X_2)، وعدم إنتاج أي وحدة من المنتج الأول (X_1). وبما يحقق للمنشأة أقصى الأرباح بلغت (50) دينار.

مثال (11): جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام الطريقة المبسطة:

Example 11: Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

Max. $Z= 6X_1+8X_2+2X_3$

S. t. :

$$X_1+ X_2 \leq 2$$
$$X_1+ 3X_3 \leq 6$$
$$X_2 \leq 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

1. تحويل نموذج الخطة البرمجة الخطية السابق، إلى الصيغة القياسية، أي إن:

Max. $Z- 6X_1-8X_2- 2X_3+0S_1+0S_2+0S_3= 0$

S.t. :

$$X_1+X_2+ S_1 = 2$$
$$X_1+ 3X_3+ S_2 = 6$$
$$X_2+ S_3 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2. تصميم جدول الحل الأولي، على النحو الآتي: Tab 1

Basic Var.	Non-Basic Variables						الثوابت (b_i^s)	النسبة
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
Z	-6	-8	-2	0	0	0	0	-
S_1	1	1	0	1	0	0	2	2
S_2	1	0	3	10	0	0	6	∞
S_3	0	①	0	00	1	1	1	①

الصف المحوري — العمود المحوري — العنصر المحوري

3. المتغير الداخل هو (X_2)، كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة (8) في صف دالة الهدف (Z).

4. المتغير الخارج هو (S_3)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (1) في عمود النسبة (Ratio).

5. العنصر المحوري هو القيمة (1).

6. يمكن الحصول على المعادلة المحور (Pivot Equation)، كالآتي:

Pivot Equation = $\left[\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{0}{1},\frac{0}{1},\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{1}\right]$

$= [0,1,0,0,0,1,1]$

7. يمكن الحصول على قيم (Z) و (S_2, S_1) الجديدة، كالآتي:

New (Z)= [-6, -8,-2,0,0,0,0]- (-8)* [0,1,0,0,0,1,1]

= [-6, -8,-2,0,0,0,0] + [0,8,0,0,0,8,8]

= [-6,0,-2,0,0,8,8]

New (S_1) = [1,1,0,1,0,0,2] -(1)* [0,1,0,0,0,0,1,1]

= [1,0,0,1,0,-1,1]

New (S_2) = Old (S_2)

= [1,0,3,0,1,0,6]

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول حل ثاني، وعلى النحو الآتي:Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت (b_i^s) R.H.S	النسبة Ratio
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
Z	-6	0	-2	0	0	8	8	-
S_1	①	0	0	1	0	-1	1	①
S_2	1	0	3	0	1	0	6	6
X_2	0	1	0	0	0	1	1	∞

الصف المحوري العمود المحوري العنصر المحوري

8. بما إن بعض قيم المعاملات (C_j) في صف دالة الهدف الجديدة سالبة، أي إن ($C_j<0$)، عليه نقوم بإعادة نفس الخطوات السابقة من (3−7)، وكالآتي:

أ. المتغير الداخل هو (X_1).

ب. المتغير الخارج هو (S_1).

ج. العنصر المحوري هو القيمة (1).

د. المعادلة المحورية هي:

Pivot Equation = $[1,0,0,1,0,-1,1]$

هـ. يتم إيجاد القيم الجديدة لكل من (Z) و (X_2, S_2)، كالآتي:

New (Z)= [-6, 0,-2,0,0,8,8]- (-6)* [1,0,0,1,0,-1,1]

= [-6, 0,-2,0,0,8,8] + [6,0,0,6,0,-6,6]

= [0,0,-2,6,0,2,14]

New (S_2) = [1,0,3,0,1,0,6] -(1)* [1,0,0,1,0,-1,1,]

= [0,0,3,-1,1,1,5]

New (X_2) = Old (X_2)

= [0,1,0,0,0,1,1]

نقوم بوضع النتائج أعلاه، في جدول ثالث، وعلى النحو الآتي: Table 3

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت (b_i^s) R.H.S	النسبة Ratio
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
Z	0	0	-2	6	0	2	14	-
X_1	1	0	0	1	0	-1	1	∞
S_2	0	0	③	-1	1	1	5	$\frac{5}{3}$
X_2	0	1	0	0	0	1	1	∞

الصف المحوري — العمود المحوري — العنصر المحوري

و. من نتائج الجدول السابق، يتضح بأنه لم يتم الوصول إلى الحل الأمثل، نظراً لوجود قيمة سالبة (2-) في صف دالة الهدف (Z)، أي إن ($C_j < 0$)، عليه سيتم إعادة نفس الخطوات، وكالآتي:

1. المتغير الداخل المتغير الداخل هو (X_3).
2. المتغير الخارج هو (S_2).
3. العنصر المحوري هو (3).
4. المعادلة المحورية:

$$\text{Pivot Equation} = \left[\frac{0}{3}, \frac{0}{3}, \frac{3}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$$

$$= \left[0,0,1,\frac{-1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$$

5. يتم إيجاد القيم الجديدة لكل من (Z)و (X_2 , X_1)، كالآتي:

New (Z)= [-0, 0,-2,6,0,2,14]- (-2)* $\left[0,0,1,\frac{-1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$

= [-0, 0,-2,6,0,2,14] + $\left[0,0,2,\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right]$

= $\left[0,0,0,\frac{16}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{3},\frac{52}{3}\right]$

=New (X_1) = Old (X_1)

= [,10,0,1,0,-1,1]

New (X_2) = Old (X_2)

= [0,1,0,0,0,1,1]

نقوم بوضع النتائج السابقة، في جدول رابع، وعلى النحو الآتي:

Tab. 4

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت (b_i^s)
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z^*	0	0	0	$\frac{16}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{52}{3}$
X_1	1	0	0	1	0	-1	1
X_3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
X_2	0	1	0	0	0	1	1

6. بما إن جميع المعاملات (C_j) في صف دالة الهدف (Z) موجبة وتساوي (صفر)، أي إن $(C_j \geq 0)$، عليه فإن الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = \frac{5}{3}\ \ Z^* = \frac{52}{3} = 17.33$$

الاستنتاج:

يتضح من النتائج النهائية للحل الأمثل، يتضح بأن إدارة المنشاة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (1) وحدات واحدة من النوع (X_1)، وإنتاج (1) وحدة واحدة من النوع (X_2)، وإنتاج تقريباً ($\frac{5}{3}$ =1.7) من النوع (X_3)، وبما يحقق لها أقصى الأرباح بلغت (17.33) دينار أردني.

2-5 حل نموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة دالة الهدف (Z) تقليل:

Solution of (L.P) Model with Minimization Objective Function .

إن حل نموذج البرمجة الخطية (LP) بموجب الطريقة المبسطة (Simplex Method)، في حالة تقليل (Min) دالة الهدف (Z)، أي عندما تكون جميع علامات القيود بصيغة أكبر من أو تساوي (≥)، أو تكون علامات القيود بصيغة [المساواة (=)، أو أكبر من أو تساوي (≥)] في حالات خاصة جداً، يتم بواسطة أحد الأسلوبيين الآتيين:

1. طريقة (M) الكبيرة (Big-M) method.
2. طريقة المرحلتين (Two- phase) method.

2-5-1 طريقة (آم) الكبرى The (Big-M) method:

تنطوي فكرة هذه الطريقة على إضافة متغيرات اصطناعية (Artificial Variables) إلى جانب المتغيرات الراكدة (Slack Variables) إلى قيود نموذج البرمجة الخطية (LP) في حالة التقليل (Minimization). عندما تكون علامات القيود مكتوبة بصيغة [المساواة (=). أو أكبر من أو تساوي (≥)]. وإلى دالة الهدف (Z)، على أن تقترن المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف (Z) بمعاملات كبيرة جداً تدعى (M)، وتحمل هذه المعاملات (M) إشارة موجبة في دالة الهدف (Z) في حالة التقليل (Minimization) وإشارة سالبة في حالة التعظيم (Maximization).

خطوات الحل بموجب طريقة (M) الكبيرة:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، بعد إضافة المتغيرات الراكدة (S_i) إلى قيود النموذج ودالة الهدف. بعد ذلك يتطلب إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) إلى القيود ودالة الهدف أيضاً.

2. صياغة دالة الهدف جديدة (Z)، بدلالة المتغيرات (X_j)و (S_i)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة (M) فقط.

3. تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، اعتماداً على جميع معاملات المتغيرات (R_i ,S_i , X_j) الموجودة في قيود النموذج ودالة الهدف (Z).

4. تحديد المتغير الداخل، على أساس اكبر قيمة موجبة في صف دالة الهدف (Z).

5. اعتماد بقية الخطوات السابقة والواردة في حالة التعظيم (Minimization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات (C_j) دالة الهدف الجديدة في جدول الحل، أقل أو تساوي الصفر، أي إن ($C_j < 0$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل.

مثال (12):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام طريقة (μ) الكبيرة:

Example (12): Find the optimal solution for (L.P)Model using (Big.M)Method?.

Min. $Z = 2X_1+X_2$

S. t. :

$$X_1+3X_2 \geq 30$$
$$4X_1+2X_2 \geq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

أ. 1. تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، كالآتي:

Min. $Z = 2X_1+X_2 + 0S_1 + 0S_2$

S. t. :

$$X_1+3X_2 - S_1 = 30$$
$$4X_1+2X_2 - S_2 = 40$$
$$X_1, X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

يتضح من القيدين السابقين بأن قيم (S_1) و (S_2) ظهرت سالبة وهي (S_1 = -30, S_2= -40)، مما يتقاطع ذلك مع عدم السلبية (S_1 , $S_2 \geq 0$)، ولمعالجة هذا الموضوع يتم ذلك بإضافة لمتغيرات الاصطناعية للقيود ودالة الهدف (Z).

3. إضـافة المتغيـرات الاصـطناعية (R_i) لقيـود النمـوذج ودالـة الهـدف (Z)، وعلـى النحـو الآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1+X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$$

S. t. :

$$X_1+3X_2 - S_1 + R_1 = 30 \text{ …….. (1)}$$
$$4X_1+2X_2 - S_2 + R_2= 40 \text{ ……. (2)}$$
$$X_1, X_2 , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 \geq 0$$

M: Is Very Big

أ. صياغة دالة الهدف (Z) بدلالة المتغيرات (X_j) و (S_i) فقط، وكالآتي:

من المعادلتين (1) و (2) نحصل على كل من (R_1) و (R_2)، إذن إن:

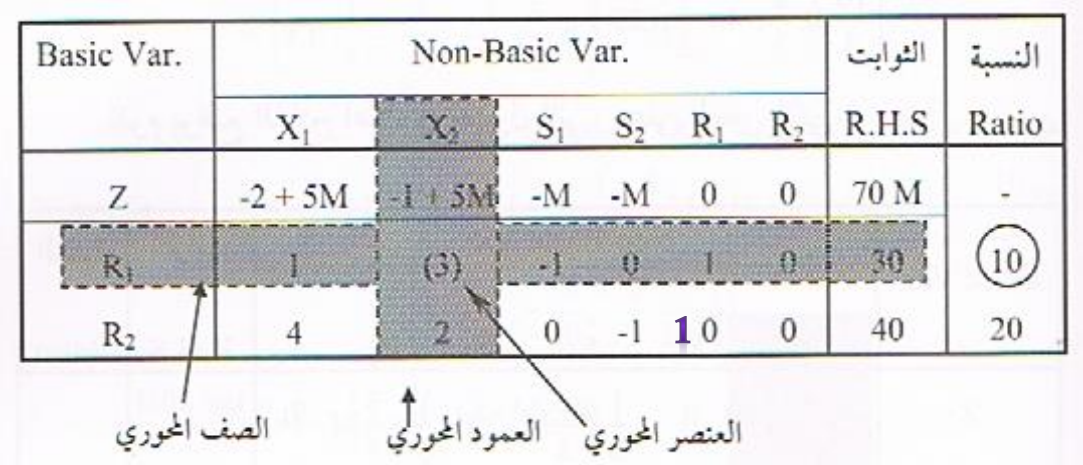
$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 30 - X_1 - 3X_2 + S_1 \\ R_2 &= 40 - 4X_1 - 2X_2 + S_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{……(3)}$$

نعوض قيم (R_1) و (R_2) الواردة بالعلاقة (3) في دالة الهدف (Z)، ينتج:

$$Z= 2 X_1 + X_2 + M (30- X_1 - 3X_2 - S_1) + M (40 - 4X_1- 2X_2 + S_2)$$
$$Z = 2X_1 + X_2 + 30M - MX_1 - 3MX_2 - S_1 + 40M - 4MX_1 - 2MX_2 + MS_2$$
$$Z = (2- 5M) X_1 + (1-5M) X_2 + MS - MS_2 + 70M$$
$$Z - (2- 5M) X_1 + (1-5M) X_2 + MS - MS_2 = 70M$$

ج. تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، وكالآتي:

Table 1



د. المتغير الداخل هو (X_2)، لكونه يقابل اكبر قيمة موجبة (5M +-1)، في صف دالة الهدف (Z)، بد اقتراض قيمة (M= 100).

هـ. المتغير الخارج هو (R_1)، لكونه يقابل اصغر قيمة موجبة (10) في عمود النسبة (Ratio).

و. العنصر المحوري هو (3).

ز. عليه تكون المعادلة المحورية (Pivot Equation)، كالآتي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[\frac{1}{3},\frac{3}{3},\frac{-1}{3},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{0}{3},\frac{30}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10\right]$$

ح. نقوم بإيجاد قيمة (Z) و (R_2) الجديتين، على النحو الآتي:

$$\text{New (Z)} = (-2 + 5M, -1 + 5M, -M.0.0.70\ M) - (-1+5M) * \left[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10)\right]$$

$$= \left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M,0,\frac{-1}{3}\frac{2}{3}M,-M,\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M,0,10-20M\right]$$

$$\text{New } (R_2) = [4, 2,0,-1,0,1,40] - 2 * \left[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10)\right]$$

$$= \left[\frac{10}{3},0,\frac{2}{3},-1,\frac{-2}{3},1,20)\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول ثاني، وعلى النحو الآتي:

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
Z	$-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M$	0	$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M$	-M	$\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M$	0	10+ 20M	-
X_2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	10	30
R_2	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	1	20	6

الصف المحوري — العمود المحوري — العنصر المحوري

أ. المتغير الداخل هو (X_1)، لكونه يقابل أكبر قيمة موجبة $\left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right]$. في صف دالة الهدف (Z).

ب. المتغير الخارج هو (R_2)، لكونه يقابل أقل قيمة موجبة (6) في عمود النسبة (Ratio).

ج. العنصر المحوري هو $\left[\frac{10}{3}\right]$.

د. عليه تكون المعادلة المحورية، على النحو الآتي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[\frac{10/3}{10/3},\frac{0}{10/3},\frac{2/3}{10/3},\frac{-1}{10/3},\frac{-2/3}{10/3},\frac{1}{10/3},\frac{20}{10/3}\right]$$

$$= \left[1,0,\frac{1}{5},\frac{-3}{10},\frac{-1}{5},\frac{3}{10},6\right]$$

هـ. نقوم بإيجاد قيمة (Z) و (X_2) الجديدتين، كالآتي:

New(Z)=

$$\left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M,0,\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}M,-M,\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M,0,10+20M\right]-\left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right]*\left[1,0,\frac{1}{5},\frac{-3}{10},\frac{-1}{5},\frac{3}{10},6\right]$$

$$\left[0,0,0,\frac{-1}{2},-M,\frac{1}{2},M,20\right]$$

New $(X_2) = \left[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10\right]$

$$= \left[0,1,\frac{-2}{3},\frac{1}{10},\frac{2}{5},\frac{-1}{10},8\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه، في جدول ثالث، وكالآتي:

Table 3

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S
Z^*	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-M	$\frac{1}{2}$ -M	20
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6

وبما إن جميع المعاملات (C_j) في صف دالة الهدف (Z) أقل من او تساوي الصفر، أي إن $(C_j \leq 0)$، عليه فإن الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$X_1 = 6,\ X_2 = 8,\ Z^* = 20$

الاستنتاج:

يتضح من نتائج الجدول السابق، الذي يتضمن الحل الأمثل للمشكلة، يتضح بأن إدارة المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (6) وحدات من المنتج الثاني (X_1)، و إنتاج (8)وحدات من المنتج (X_2)، وبما يحقق لها أقل التكاليف الإنتاجية والبالغة (20) دينار.

2-5-2 طريقة ذات المرحلتين Two- Phase Method

تعد طريقة المرحلتين أبسط من طريقة (M) الكبيرة في إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (L.P) في حالة التقليل (Minimization)، إذ يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج بعد أن نتأكد بأن هناك حل لنموذج، وذلك من خلال الحصول على قيمة دالة الهدف الجديدة (r) مساوية للصفر. أي إن ($r = 0$)، وبعدمه فلا يوجد حل للنموذج، ويتم الحل بموجب هذه الطريقة على مرحلتين أساسيتين، وعلى النحو الآتي:

أ. المرحلة الأولى:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، ومن ثم إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_1) لقيود النموذج فقط.
2. صياغة دالة هدف جديدة (r) بالاعتماد على المتغيرات الاصطناعية (R_1)، أي إن:

$r = R_1 - R_2 - \dots R_n \rightarrow Min$

3. تصميم جدول يتضمن الحل الأولي، اعتماداً على معاملات لمتغيرات (R_1, S_1, X_j) في قيود لنموذج، ودالة الهدف الجديدة (r).
4. نتبع الخطوات السابقة، حتى نحصل على قيمة ($r = 0$). مما يعني وجود حل للنموذج، والمقترنة في كون ($C_j \leq 0$) لجميع معاملات دالة الهدف (r).

ب. المرحلة الثانية:

1. اعتماد الحل الأساسي النهائي في الخطوة (4) من المرحلة الأولى، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R)، ودالة الهدف (r).
2. اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، وتحسين قيمتها، للحصول على الحل الأمثل للمشكلة.
3. في حالة وجود أحد المعاملات (C_j) أكبر من الصفر ($C_j > 0$) في صف دالة الهدف (Z)، يعاد إجراء نفس الخطوات حتى يتم الحصول على جميع المعاملات (C_j) أقل أو تساوي الصفر، أي إن ($C_j \leq 0$)، مما يعني تم الحصول على الحل الأمثل للنموذج.

مثال (13):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام طريقة المرحلتين؟.

Example 13: Find the optimal solution for (L.P)Model using Two-phase Method?.

$Min.\ Z = 2X_1 + X_2$

S. t.

$$X_1+3X_2 \geq 30$$
$$4X_1+2X_2 \geq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

المرحلة الأولى:

1. تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1+X_2- 0S_1 - 0S_2$$

S. t.

$$X_1+3X_2 - S_1 = 30$$
$$4X_1+2X_2 - S_2 = 40$$
$$X_1, X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

يتضح من القيدين السابقين بأن قيم (S_1) و (S_2) ظهرت سالبة وهي على الترتيب - S_2= (40, S_1 = -30)، مما يتقاطع ذلك مع شرط عدم السلبية (S_1 , S_2 ≥ 0)، عليه سيتم إضافية المتغيرات الاصطناعية (R_1, R_2) للقيود، على النحو الآتي:

$X_1+3X_2 - S_1+ R_1= 30$ …… (1)

$4X_1+2X_2 – S_2 + R_2 = 40$ ……..…(2)

$X_1, X_2 , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 \geq 0$

3. صياغة دالة هدف جديدة، (r)، اعتماداً على قيم (R_1 , R_2)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة ثابتة فقط، إذ إن:

من المعادلتين (1) و (2)، نحصل على:

$$r = R_1 + R_2 \rightarrow Min$$

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 30 – X_1 -3X_2 + S_1 \\ R_2 &= 40- 4X_1 – 2X_2 + S_2 \end{aligned}\right\}$$

نعوض قيمة (R_1) و (R_2) الواردة بالعلاقة (3)، في دالة الهدف الجديدة (r)، وكالآتي:

$$\text{Min } r = (30- X_1 – 3X_2 + S_1) + (40 – 4X_1 -2X_2 –S_2)$$
$$= 70- 5X_1 -5X_2 + S_1 + S_2$$
$$r + 5X_1 + 5X_2 – S_1 – S_2 = 70$$

4. تصميم جدول يتضمن الحل الأولي، وعلى النحو الآتي:

Table 1

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
r	5	5	-1	-1	0	0	70	-
R_1	1	3	-1	0	1	0	30	30
R_2	4	2	0	-1	0	1	40	10

الصف المحوري العمود المحوري العنصر المحوري

أ. المتغير الداخل (X_1)، ولمتغير الخارج (R_2)، والعنصر المحوري هو (4).

ب. المعادلة المحورية، تكتب على الوجه الآتي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[1, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 10\right]$$

ج. قيم (r) و (R_1) الجديدتين، تعطى على النحو الآتي:

$$\text{New (r)} = [5, 5, -1, -1, 0, 0, 70] - 5 * \left[1, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0\right]$$

$$\text{New (r)} = \left[0, \frac{5}{2}, -1, \frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}, 20\right]$$

$$\text{New } (R_1) = \left[0, \frac{5}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{-1}{4}, 30\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه، في جدول ثاني، وكالآتي:

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
r	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	20	-
R_1	0	$\left(\frac{5}{2}\right)$	-1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	20	(8)
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	10	20

الصف المحوري — العمود المحوري — العنصر المحوري

أ. المتغير الداخل (X_2)، والمتغير الخارج (R_1)، والعنصر المحوري هو $\left[\frac{5}{2}\right]$.

ب. المعادلة المحورية هي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[0,1,\frac{-2}{5},\frac{1}{10},,\frac{2}{5},-\frac{1}{10},8\right]$$

ج. إيجاد قيم (r) و (X) الجديدتين، على النحو الآتي:

$$\text{New (r)} = [0,\frac{5}{2},-1,\frac{1}{4},0,\frac{-5}{4},20] \ \frac{5}{2}\text{-}* \left[0,1,\frac{-2}{5},\frac{1}{10},\frac{2}{5},\frac{-1}{10},8\right]$$

$$= [0,0,0,0,-1,-1,0]$$

$$\text{New } (X_1) = \left[1,\frac{1}{2},0,\frac{-1}{4},0,-\frac{1}{4},10\right] - \frac{1}{2} * \left[0,1,\frac{-2}{5},\frac{1}{10},\frac{2}{5},\frac{-1}{10},8\right]$$

$$= \left[1,0,\frac{1}{5},,\frac{-3}{10},,\frac{-1}{5},\frac{3}{10},6\right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه، في جدول ثالث، وكالآتي:

Table 3

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
r	0	0	0	0	-1	-1	0	-
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8	-
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6	-

د. بما إن قيمة دالة الهدف ($r = 0$)، والمقترنة ب ($C_j \leq 0$)، مما يدل ذلك على وجود حل للنموذج، والاستمرار بالمرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

1. اعتماد نتائج الحل الأساسي النهائي الوارد بالجدول الثالث من المرحلة الأولى. بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1 وR_2)، ودالة الهدف (r) من الجدول.
2. اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، والتي هي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ونقوم بتحسين قيمتها، للحصول على الحل الأمثل النهائي، وعلى النحو الآتي:

Table 4

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i^s)
	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	2	1	0	0	0
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	9

وبعد استبعاد قيم (R_1 وR_2)، ودالة الهدف (r) من جدول الحل الأخير، وإضافة دالة الهدف الأصلية (Z) للجدول، نقوم بكتابة القيود اعتماداً على نتائج الجدول النهائي، وعلى النحو الآتي:

$$X_2 - \frac{2}{5}S_1 + \frac{1}{10}S_2 = 8 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$X_1 + \frac{1}{15}S_1 - \frac{3}{10}S_2 = 6 \ldots\ldots\ldots(2)$$

من المعادلتين (1) و (2)، نحصل على قيم (X_2 , X_1)، كالآتي:

$$X_2 = 8 + \frac{2}{5}S_1 - \frac{1}{10}S_2$$

$$X_1 = 6 - \frac{1}{5}S_1 + \frac{3}{10}S_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض قيم (X_2 , X_1) الواردة بالعلاقة (3) في دالة الهدف الأصلية (Z)، ينتج:

$$\because Z = 2X_1 + X_2$$

$$\therefore Z = 2*\left[6 - \frac{1}{5}S_1 + \frac{3}{10}S_2\right] + \left[8 + \frac{2}{5}S_1 - \frac{1}{10}S_2\right]$$

$$= 12 - \frac{2}{5}S_1 + \frac{6}{10}S_2 + 8 + \frac{2}{5}S_1 - \frac{1}{10}S_2$$

$$= 20 + \frac{5}{10}S_2$$

$$Z - \frac{1}{2}S_2 = 20$$

نقوم بوضع نتيجة دالة الهدف الأصلية (Z) النهائية، في جدول الحل النهائي، وكالآتي:

Table 5

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i^s)
	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z^*	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	20
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	6

يتضح من نتائج جدول الحل النهائي، بأن جميع معاملات دالة الهدف (Z)، هي أقل من وتساوي الصفر، أي إن $(C_j \leq 0)$، عليه فإن الحل النهائي، يكون كالآتي:

$X_1 = 6, X_2 = 8\ Z^* = 20$

وهو نفس النتيجة التي تم التوصل إليها، بموجب طريقة (M) الكبيرة.

الاستنتاج:

يتضح من نتائج النهائية، بأن إدارة المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (6) وحدات من المنتج (X_1)، و (8)وحدات من المنتج (X_2)، وبما يجعل التكاليف الكلية للإنتاج أقل ما يمكن، إذ بلغت (20) دينار أردني.

أسئلة وتمارين عامة

س1: وضح مفهوم البرمجة الخطية (LP)، شارحاً أهم استخدامات نماذج البرمجة الخطية.

Q1: Clarify the concept of (LP), explaining the most important uses (LP.) models.

س2: عدد طرق حل نموذج البرمجة الخطية (LP)، شارحاً واحداً منها.

Q 2: the number of method of using (LP), explaining one of them.

س3: وضح صيغة الجدول الذي يتم بموجبه توضيح قواعد إضافة المتغيرات الراكدة (Slack Variables)، عند تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية.

Q 3: Explain table form under which clarify the rules add (Slack Variables), when you convert a mathematical model of the legal form to the standard formula.

س4: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP)، بيانياً.

Q4 /Find the optimal solution of (LP) by using graphical method

Max. $Z= 4X_1+3X_2$

Subject to:

$$3X_1+2X_2 \leq 30$$
$$X_1+2X_2 \leq 20$$
$$X_1 = 9$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

س5: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، جبرياً.

Q5/Find the optimal solution following by using Algebraic method

Min. $Z= 3X_1+4X_2$

Subject to:

$$2X_1+3X_2 \geq 6$$
$$4X_1+2X_2 \geq 8$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

س6: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، بيانياً وجبرياً.

Q 6/Find the optimal solution for the following (LP) model by using Algebraic and graphic method

Max. $Z= 10X_1+3X_2$

Subject to:

$2X_1+X_2 \leq 30$

$2X_1+3X_2 \leq 20$

$X_1 \geq 2$

$X_2 \geq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$

س7: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام طريقة (M) الكبيرة:

Q 6/Find the optimal solution for the following (LP) model by using Big M method

Min. $Z= 6X_1+4X_2$

Subject to:

$X_1+X_2 \geq 4$

$2X_1+3X_2 \leq 8$

$X_1 , X_2 \geq 0$

س8: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP) التالي، باستخدام طريقة المرحلتين:

Q8/Find the optimal solution (L.P) by using)two-phases method

Min. $Z= 3X_1+2X_2$

Subject to:

$X_1+X_2 \geq 2$

$2X_1+3X_2 \leq 8$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الفصل الثالث

الثنائية في البرمجة الخطية

Duality in Linear Programming

3–1 مفهوم المشكلة الثنائية: The Concept of Duality Problem

3 –2 النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأولى بالصيغة القانونية

Dual Problem when Primal Model in Canonical Form

3–3 النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأول بالصيغة القياسية

Dual Problem when primal Model in Standard Form

3–4 ايجاد الحل للمشكلة المقابلة (الثنائية)

Find a Solution for Dual Model

الفصل الثالث

الثنائية في البرمجة الخطية

Duality in Linear Programming

3-1 مفهوم المشكلة الثنائية: The Concept of Duality Problem

إن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً مقابلاً (ثنائياً) يسمى أحد النموذجين بالنموذج الأولي Primal model، بينما يطلق على الآخر تسمية النموذج المقابل (الثنائي) Dual model إن من أهم الصفات المشتركة للنموذج الأولي والثنائي. هو إن الحل الأمثل لأحدهما (في حالة وجود حل) يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للنموذج الآخر.

تتمثل أهمية الثنائية في مسائل البرمجة الخطية فيما يلي:

1. تقليص الجهد الحسابي المطلوب في تحليل مسألة البرمجة الخطية التي تحتوي على عدد كبير من القيود وهذا له فوائد كبيرة في استخدامات وتطبيقات متعددة.
2. تشير الثنائية في البرمجة الخطية إلى إن كل برنامج خطي مكافئ إلى مباراة بين شخصين ذات مجموع صغري 2- Person Zero Sum game وهذا يؤكد وجود علاقة بين طريقة البرمجة الخطية ونظرية المباراة.

سوف نتطرق إليها عندما نستخدم البرمجة الخطية ونظرية المباراة.

3. بالإمكان الحصول على الحل الأمثل للمسألة الثنائية من جدول الحل الأمثل الأولية مباشرة والعكس صحيح، ولعل من المفيد اختيار المسألة التي تحتوي عدد قليل من القيود. والتي تعتبر ملائمة أكثر للحسابات التكرارية أو بالنسبة للبرامج الجاهزة في الكومبيوتر.
4. إذا كان لأحد متغيرات النموذج الأول قيمة سالبة فإن حل النموذج هذا غير ممكن بينما في حالة النموذج المقابل يمكن إيجاد حل للمشكلة عند وجود متغير ذي قيمة سالبة.

تعريف المشكلة الثنائية Defined Duality Problem

تسمى مسألة البرمجة الخطية متماثلة Symmetric إذا كانت جميع المتغيرات x_j مقيدة بالإشارة. وجميع القيود في صيغة متباينات من نوع أو أقل أو يساوي $\leq$ عندما تكون دالة الهدف من نوع Maximum أو أكبر أو يساوي $\geq$ في حالة أن تكون دالة الهدف من نوع Minimum وفيما يلي توضيح للصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية الأولية والثنائية في حالتها المتماثلة.

1. المسألة الأولية Primal Problem

$$Max\, x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$s.to:$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2...m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2...n$$

2. المسألة الثنائية Dual Problem

$$Min\, y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$s.to:$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_i \quad j = 1,2...n$$

$$y_i \ge 0 \qquad i = 1,2..., m$$

وباستخدام المصفوفات يمكن إعادة كتابة الصيغتين أعلاه

1. المسألة الأولية

$$MaxZ = cx$$

$s.to:$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

2. المسألة الثنائية

Min w= yb

s. to:

yA≥ C

y≥ 0

نظرية (1): Theory (1)

إذا كان نموذج البرمجة الخطية الأولية والثنائية المتماثلة كالآتي:

$$MaxZ = cx$$

$$s.to:$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

$$\text{Min } w = yb$$

$$\text{s. to:}$$

$$yA \ge C$$

$$y \ge 0$$

فإن قيمة دالة الهدف للنموذج الثنائي dual في حالة وجود حل مقبول للمسألة دائماً اكبر من أو مساوية إلى قيمة دالة الهدف للمساوية الأولية Primal.

البرهان:

نفرض إن y^0, x^0 يمثلان متجهاً للحلول المقبولة للمسألة الأولية والثنائية على التوالي.

نبرهن $y^0 b \ge cx^0$

بما إن x^0 يمثل حل مقبول للمسألة الأولية. فإن

$$Ax^0 \le b$$
$$x^0 \ge 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

وبالمثل، بما إن y^0 يمثل حل مقبول للنموذج الثنائي. فإن

$$y^0 A \ge c$$
$$y^0 \ge 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

نضرب طرفي المتباينة (1) في y^0. نحصل على

$$y^0 Ax^0 \le y^0 b \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

وبالمثل نضرب طرفي المتباينة (2) في x^0، نحصل على

$$y^0 Ax^0 \ge cx^0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ينتج من المتباينتين (3) و (4)

$$y^0 b \ge y^0 Ax^0 \ge cx^0$$

لذا فإن

$$y^0 b \ge cx^0$$

من النظرية أعلاه يمكن الإشارة إلى النتائج المهمة الآتية:

1. إن قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة الأولية من نوع Max لأي حل مقبول تمثل الحد الأدنى للقيمة الصغرى لدالة الهدف في النموذج الثنائي.
2. وبالمثل فإن قيمة دالة الهدف للنموذج الثنائي من نوع Min تمثل الحد الأعلى للقيمة العظمى لدالة الهدف للمسألة الأولية.
3. إذا كان حل المسألة الأولية مقبول وقيمة دالة الهدف غير محدودة (أي إن $\text{Max } x_0 \rightarrow +\infty$). فإن المسألة الثنائية لا يوجد لها حل مقبول.
4. إذا كان حل المسألة الثنائية مقبول وقيمة دالة الهدف غير محدودة ($\text{Min } y_0 \rightarrow -\infty$)، فإن المسألة الأولية لها حل غير مقبول.
5. إذا كان حل النموذج الأولي مقبول، وحل النموذج الثنائي غير مقبول. فإن حل المسألة الأولية يكون غير محدود unbounded.
6. إذا كان حل النموذج الثنائي (dual) مقبول، وحل النموذج الأولي Primal غير مقبول، فإن النموذج الثنائي يكون غير محدود.

مثال (1)

إذا كان النموذج الأولي لمسألة البرمجة الخطية كالآتي:

Ex(1) If the Primary model for LP as the following

$$\text{Max } z_0 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$

s. to:

$$x_1+2x_2+2x_3+3x_4 \leq 20$$

$$2x_1+x_2+3x_3+2x_4 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

وعليه يكون كتابة النموذج الثنائي (dual) كما يلي:

$$\text{Min } Z_0 = 20y_1+30y_2$$

s. to:

$$y_1+2y_2 \geq 1$$

$$2y_1+y_2 \geq 2$$

$$2y_1+3y_2 \geq 3$$

$$3y_1+2y_2 \geq 4$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

بعد تحليل النموذجين باستخدام طريقة السمبلكس Simplex، توصلنا إلى الحلول المقبولة التالية:

للمسألة الأولية

$$x_1=x_2=x_3=x_4= 1$$

$$x_0= cx^0= 10$$

للمسألة الثنائية

$$y_1=y_2= 1$$

$$Y_0=y^0b= 40$$

من هذا يتبين بأن

$$Cx^0 < y^0b$$

وباستخدام النتيجة الأولى والثانية من النظرية السابقة يتضح بأن القيمة الصغرى لدالة الهدف y_0 لا يمكن أن تكون أقل من 10

نظرية (2) **Theory (2)**

إذا كان هناك حلول مقبولة x^0 ,y^0 لنماذج البرمجة الخطية الأولية والثنائية المتماثلة، بحيث إن قيم دالة الهدف لكل منها متساوية، فإن هذه الحلول المقبولة وهي الحلول المثلى للمسألة المناظرة.

البرهان:

افرض إن x^0 يمثل أي حل مقبول للمسألة الأولية.

فإن

نظرية (1) $cx^0 \leq y^0 b$

ولكن بالفرض

$$cx^0 = y^0 b$$

لذا فإن

$cx < cx^0$ لجميع الحلول المقبولة للنموذج الأولي

وعليه فإن من تعريف x^0 (الحل الأمثل للمسألة الأولية) ومن خاصية التماثل نبرهن إن y^0 هو الحل الأمثل للنموذج الثنائي.

نظرية (3): Theory (3)

إذا كانت حلول النموذج الأولي والثنائي مقبولة. فإن لكلاهما حلول مثلى بحيث إن القيم المثلى لدالة الهدف متساوية.

3-2 النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأولى بالصيغة القانونية:
Dual Problem when Primal Model is in Canonical Form

من المعلوم، بأن الصيغة القانونية لمسألة البرمجة الخطية هي كالآتي:

$$Max\, Z_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$s.to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2...m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2...n$$

وعليه فإن النموذج المقابل dual للنموذج الأولي Primal أعلاه كما يلي:

$$Min\, y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.to:$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_i \qquad j = 1,2...n$$

$$y_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1,2...,m$$

حيث y_i تمثل متغيرات النموذج المقابل.

إن الصيغة الثنائية الجديدة لها عدد من المتغيرات y_i يساوي عدد القيود في المسألة الأولية.

مثال (2) : اكتب النموذج الثنائي (المقابل) لمسألة البرمجة الخطية التالية

Example (2) Write the Duality model for (LP)

$$\text{Max } Z_0 = 5x_1 + 6x_2$$

s. to:

$$x_1 + 9x_2 \leq 60 \rightarrow y_1$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 45 \rightarrow y_2$$

$$2x_2 \leq 20 \rightarrow y_3 \qquad\qquad -5x_1$$

$$x_1 \leq 30 \rightarrow y_4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

بما إن دالة الهدف من نوع Max، والقيود جميعها من نوع ≤، والمتغيرات x_1, x_2 مقيدة بالإشارة، لذا فإنه من الممكن كتابة النموذج المقابل مباشرة بافتراض إن y_1, y_2, y_3, y_4 متغيرات لهذا النموذج وكالآتي:

$$\text{Min } Z_0 = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$$

s. to:

$$y_1+2y_2+5y_3+y_4 \geq 5$$

$$9y_1+3y_2-2y_3 \geq 6$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

نلاحظ من المثال أعلاه، بأن النموذج المقابل يحتوي على عدد من القيود أقل من قيود النموذج الأولي، ولما كان الحل الأمثل لإحدى المسألتين يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للمسألة الأخرى، لهذا فمن المفيد إذن حل النموذج المقابل لأن الصعوبة الحسابية في مسائل البرمجة الخطية تأتي من كثرة القيود.

3 –3 النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأول بالصيغة القياسية

Dual Problem when primal Model in Standard Form

لقد ذكرنا سابقاً، إنه في الصيغة القياسية لمسألة البرمجة الخطية، تكون جميع القيود عبارة عن معادلات، وسوف نبين فيما يلي إن كل قيد مساواة Equality constraint في المسألة الأولية (أو الثنائية) يناظر متغير غير مقيد بالإشارة في الثنائية (والأولية).

فإذا كانت مسألة البرمجة الخطية التالية بالشكل القياسي:

$$Max\, x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$s.to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2...m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2...n$$

فإن النموذج المقابل لها كالآتي:

$$Min\, y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.to:$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_i \quad j = 1,2...n$$

$$y_i \ (unrestricted\ in\ sign)$$

غير مقيدة بالإشارة

وإذا كانت مسألة البرمجة الخطية بالشكل التالي:

$$Max\, x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$s.to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2,..., m$$

$$x_j\ unrestericed\ in\ sign$$

فإن النموذج المقابل لها سيكون كالآتي:

$$Min\, y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.to:$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_i \quad i = 1,2...n$$

$$y_i \geq 0$$

وفيما يلي مجموعة من الأمثلة التوضيحية لما ذكرناه سابقاً.

مثال(3):

اكتب النماذج الثنائية المناظرة لكل مسألة من مسائل البرمجة الخطية التالية: **Example**

(3) Write the Duality model for (LP)

1- Max $Z_x=5x_1+12x_2+4x_3$

s. to:

$x_1+2x_2+3x_3 \leq 5$

$2x_1-x_2+3x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الحل:

بما إن القيود ملائمة لدالة الهدف، نكتب النموذج المقابل مباشرة كالآتي:

Min $Z_y= 5y_1+2y_2$

s. to:

$y_1+2y_2 \geq 5$

$2y_1-y_2 \geq 12$

$3y_1+3y_2 \geq 4$

$y_1 \geq 0$, y_2 unrestricted

ملاحظة:

كما ذكرنا سابقاً، كل قيد مساواة يمثل بمتغير غير مقيد بالإشارة. وكل متغير غير مقيد بالإشارة يناظر قيد مساواة. لذلك أصبح المتغير الثاني y_2 المقابل للقيد الثاني غير مقيد بالإشارة.

2- Max $Z_x=x_1+x_2$

s. to:

$3x_1+x_2+ x_3 \leq 6$

$x_1 - x_2 + x_3 = 4$

$x_1 + 2x_2 \geq 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الحل:

نعيد كتابة المسألة المعطاة بالشكل الآتي:

Max $Z_x = x_1 + x_2$

s. to:

$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

$x_1 - x_2 + x_3 = 4$

$-x_1 - 2x_2 \leq -1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

لذا فإن النموذج المقابل للمسألة أعلاه ما يلي:

Min $Z_y = 6y_1 + 4y_2 - y_3$

s. to:

$3y_1 + y_2 - y_3 \geq 1$

$y_1 - y_2 - y_3 \geq 1$

$y_1 + y_2 \geq 0$

$y_1 \geq 0, y_3 \geq 0, y_2$ unrestricted

3- Min $Z_x = 6x_1 + 3x_2$

s. to:

$6x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2$

$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 4$

$-x_1 - 2x_2 \leq -1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الحل:

نلاحظ في هذا المثال بأن دالة الهدف من نوع Min والقيود جميعها من نوع ≥ إذن نكتب النموذج المقابل مباشرة كالآتي:

Max $Z_y = 2y_1+5y_2$

s. to:

$6y_1+3y_2 \leq 6$

$-3y_1+4y_2 \leq 3$

$y_1+y_2 \leq 0$

$y_1, y_2 \geq 0$

4- Max $Z_x=x_1+x_2$

s. to:

$2x_1+x_2= 5$

$3x_1-x_2= 6$

x_1, x_2, unrestricted

الحل:

النموذج المقابل لها كالآتي:

Min $Z_y= 5y_1+6y_2$

s. to:

$2y_1+3y_2 = 1$

$y_1-y_2 = 1$

y_1, y_2 unrestricted

5- Max $Z_x=3x_1+5x_2$

s. to:

$$2x_1+6x_2 \leq 50$$

$$3x_1+2x_2 \leq 35$$

$$5x_1-3x_2 \leq 10$$

$$x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

النموذج المقابل:

Min $Z_y= 50y_1+35y_2+10\ y_3+\ 20y_4$

s. to:

$$2y_1+3y_2+5y_3 \geq 3$$

$$6y_1+2y_2-3y_3+y_4 \geq 5$$

$$y_1, y2, y3, y4 \geq 0$$

4-3 ايجاد الحل للمشكلة المقابلة (الثنائية):-

Find a Solution for Dual Model

أن ايجاد للمشكلة المقابلة (الثنائية) لا يختلف كثيرا عن الحل في المشكلة الاولية سوى في بعض الخطوات البسيطة منها المتعلقة بشروط النموذج او في خطوات حساب المتغير الداخل والمتغير الخارج وكما سيتم شرحه لاحقا .

مثال4:- لنموذج البرمجة الخطية الاتي احسب كل من :-

1- النموذج المقابل

2- الحل الامثل باستخدام الطريقة المبسطة للنموذج المقابل .

Example.4. For the problem (L.P) Model find:

1- The Dual Model?

2- Solve the problem using Dual simplex method?

$$MaxZ_x = 30X_1 + 18X_2$$

s .t

$$\begin{aligned} Y_1 \quad & X_1 + 2X_2 \le 200 \quad ...1 \\ Y_2 \quad & 3X_1 + 2X_2 \le 300 \quad ...2 \\ Y_3 \quad & X_1 \le 150 \quad ...3 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

بما أن دالة الهدف من نوع Max وجميع القيود من النوع: $\le$ لذا يمكن تحويل المشكلة الى النموذج المقابل sol

$$MinZ_y = 200y_1 + 300y_2 + 150y_3$$

S.T

$$\begin{aligned} y_1 + \quad & 3y_2 + \quad y_3 \ge 30 \\ 2y_1 + \quad & 2y_2 \quad \ge 18 \\ y_1, y_2, y_3 & \ge 0 \end{aligned}$$

ومن جدول الحل الامثل الوارد في صفحة (48) الفصل الثاني يمكن ايجاد قيم المتغيرات y_1 , y_2 , y_3 مباشرة, وهي عبارة عن قيم S_1, S_2, S_3 الواردة في صف دالة الهدف وكما موضح في ادناه:-

Table -2-

B.V	**Non-Basic Variables**					R.H.S
	X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	
Z	0	2	0	10	0	3000
S_1	0	4/3	1	-1/3	0	100
X_1	1	2/3	0	1/3	0	100
S_3	0	-2/3	0	-1/3	1	50

$y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 0$, $Z = 3000$

واذا تم تعويض القيم اعلاه في دالة الهدف للنموذج المقابل فاننا نلاحظ انها تحقق دالة الهدف

$Z=200y_1+300y_2+150y_3$

$3000=200(0)+300(10)+150(0)$

$3000=3000$

طريقة السميلكس للنموذج المقابل Dual simplex method

اولاً:- تحديد المتغير الخارج

يتم تحويل النموذج المقابل الى الصيغة القياسية ولكن يجب ملاحظة ان يتم تحويل اشارات القيود كافة الى علامة $\leq$ بغض النظر عن كون دالة الهدف اذا كانت من نوع Max او Min, لذا فاننا نقوم بضرب القيدين بـ (-1) لتحويل اشارة القيود وكما يلي:-

$$MinZ_y = 200y_1 + 300y_2 + 150y_3$$

S.T

$$\begin{aligned} -y_1 - 3y_2 - y_3 &\leq -30 \rightarrow +S_1 \\ -2y_1 - 2y_2 &\leq -18 \rightarrow +S_2 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

والآن نحول النموذج الى الصيغة القياسية

$$\begin{aligned} Z_y - 200y_1 - 300y_2 - 150y_3 &= 0 \\ -y_1 - 3y_2 - y_3 + S_1 &= -30 \\ -2y_1 - 2y_2 + S_2 &= -18 \\ y_1, y_2, y_3, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ويتم ترتيب البيانات في جدول رقم (1) وكالاتي:-

Tab.1

B.V	**Non-Basic Variables**	R.H.S

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	
Z	-200	-300	+150	0	0	0
S_1	-1	-3	-1	1	0	-30
S_2	-2	-2	0	0	1	-18
Ratio	200	100	150	يهمل	يهمل	-

العنصر المحوري

في الجدول نجد ان الحل الابتدائي غير مقبول حيث ان قيم المتغيرات الاساسية B.V سالبة

$S_1 = -3, S_2 = -18$

لحل مثل هذه المشاكل فيجب استخدام الطريقة المبسطة للنموذج المقابل حيث نقوم بما يلي:-

اولاً:- تحديد المتغير الخارج

لقد عرفنا ان الجهة اليمنى تمثل الثابت وهو عبارة عن معادلات دالة الهدف في النموذج الاولي, لذلك نختار اقل قيمة وهي (3-) وهي تقابل S_1 لذا فهو متغير خارج.

ثانياً:- **تحديد المتغير الداخل**

نقسم معاملات المتغيرات اي القيم في صف دالة الهدف Z (السالبة فقط) على القيم المقابلة لصف المتغير الخارج الذي تم اختياره اولاً أعلاه ثم نختار أقل قيمة موجبة فقط في صف الـ Ratio مع ملاحظة ان تهمل القسمة على صفر وكذلك المقدار الموجب

$$\frac{-200}{-1}, \frac{-300}{-3}, \frac{-150}{-1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{0}$$

200, 100 , 150

ان بقية الخطوات فهي نفس خطوات طريقة السمبلكس العادية

$$P.R \quad \frac{-1}{-3}, \frac{-3}{-3}, \frac{-1}{-3}, \frac{1}{-3}, \frac{0}{3}, \frac{-30}{-3}$$

P.R 1/3, 1, 1/3, -1/3, 0, 10

New z 300 العنصر المقابل وبعكس الاشارة

S_2 2 العنصر المقابل وبعكس الاشارة

Tab.2

B.V	**Non.B.V**					R.H.S
	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	
Z	-100	0	-50	-100	0	3000
Y_2	1/3	1	1/3	-1/3	0	10
S	-4/3	0	2/3	-2/3	1	2
Ratio						

New Z

$$\begin{array}{cccccc} -200 & -300 & -150 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 300 & 100 & -100 & 0 & 3000 \\ \hline -100 & 0 & -50 & -100 & 0 & 3000 \end{array}$$

New S_2

$$\begin{array}{cccccc} -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -18 \\ 2/3 & 2 & 2/3 & -2/3 & 0 & 20 \\ \hline -\frac{4}{3} & 0 & 2/3 & -\frac{2}{3} & 1 & 2 \end{array}$$

جميع القيم الواردة في صف دالة الهدف سالبة أو صفر لدالة الهدف في النموذج المقابل وهي في نوع Min, لذا فاننا توصلنا للحل الامثل للنموذج المقابل واصبحت قيم R.H.S جميعها موجبة لذا فأن

(y_1=0, y_2=10, y_3= 0, S_1=0, S_2=2 , Z=3000

وهي نفس النتائج الواردة بالطريقة الاولى

مثال5:- لنموذج البرمجة الخطية المقابل (الثنائي) اوجد الحل الامثل باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة؟

Example(5):- For the Dual L.P Model find the optimal solution using **Dual simplex method**?

$$MinZ_y = 3y_1 + 2y_2$$

S.T

$$4y_1 + 2y_2 \geq 4$$
$$5y_1 + 4y_2 \geq 8$$
$$2y_1 + 3y_2 \leq 5$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

يتم ضرب القيدين الاول والثاني بـ 1-

$$-4y_1 - 2y_2 \leq -4 \quad . \quad . \quad +S_1$$

$$-5y_1 - 4y_2 \leq -8 \quad . \quad . \quad +S_2$$

نحول النموذج الى الصيغة القياسية

$$Z_y - 3y_1 - 2y_2 = 0$$
$$-4y_1 - 2y_2 + S_1 = -4$$
$$-5y_1 - 4y_2 + S_2 = -8$$
$$2y_1 + 3y_2 + S_3 = 5$$
$$y_1, y_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

الآن يمكننا الحصول على الجدول الاول Tab.1

B.V	**Non-Basic Variables**					R.H.S
	y1	**y2**	**S1**	**S2**	**S3**	
Z	-3	-2	0	0	0	0
S1	-4	-2	1	0	0	-4
S2	-5	-4	0	1	0	-8
S3	2	3	0	0	1	5
Ratio	¾	1/2	يهمل	يهمل	يهمل	

P.R 5/4 1 0 -1/4 0 2

New Z 2

S_1 2

S_3 -3

$$\begin{array}{cccccccc} New\ Z & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2*(P.R) & 5/2 & 2 & 0 & -1/2 & 0 & 4 \\ \hline & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} New\ S1 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 2*(P.R) & 5/2 & 2 & 0 & -1/2 & 0 & 4 \\ \hline & -3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} New\ S3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ -3*(P.R) & -15/4 & -3 & 0 & -3/4 & 0 & -6 \\ \hline & -7/4 & 0 & 0 & -3/4 & 1 & -1 \end{array}$$

Tab.2

B.V	**Non-Basic Variables**					**R.H.S**
	y1	**y2**	**S1**	**S2**	**S3**	
Z	-1/2	0	0	-1/2	0	4
S1	-3/2	0	1	-1/2	0	0
y1	5/4	1	0	-1/4	0	2
S3	-7/4	0	0	3/4	1	-1
	2/7	يهمل	يهمل	يهمل	يهمل	

وباتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على قيم الجدول رقم(3)

Tab.3

B.V	**Non-Basic Variables**					R.H.S
	y1	**y2**	**S1**	**S2**	**S3**	
Z	0	0	0	-10/14	-2/7	30/7
S_1	0	0	1	-16/14	-6/7	6/7

y_2	0	1	0	-53/28	5/7	9/7
y_1	1	0	0	-3/7	-4/7	4/7
Ratio						

بما أن جميع القيم في صف دالة الهدف Z في الجدول صفر او سالبة , لذا فأن الحل يعتبر أمثل

∴ The optimal solution is

$Z=30/7$, $y_1= 4/7$, $y_2= 9/7$, $S_1= 6/7$, $S_2=S_3= 0$

وللتاكد من صحة الحل نعوض عن القيم بدالة الهدف للنموذج المقابل فنحصل على:-

$$Z=3y_1+2y_2$$

$$\frac{30}{7}=3\left(\frac{4}{7}\right)+2\left(\frac{9}{7}\right)$$

$$\frac{30}{7}=\frac{12}{7}+\frac{18}{7}$$

$$\frac{30}{7}=\frac{30}{7}$$

الفصل الرابع

تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

4-1 المقدمة Introduction

4-2 التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة)

Changes in the R.H.S

4-3 التغيرات في معاملات دالة الهدف

Changes in coefficients of the Objective Function

4-4 التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود

Changes in coefficients of variables in constraints

4-5 إضافة متغير أو متغيرات جديدة Addition of anew variable

4-6 إضافة قيد أو قيود جديدة Addition of anew constraints

4-1المقدمة Introduction

تكمن أهمية تحليل الحساسية في إنه يعطي دراسته كاملة للمتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي بحيث يبقى لنا أكبر عائد أو أقل تكلفة وما هو مدى التغيرات في هذه المتغيرات، فمثلاً إذا حدثت بعض التغيرات في ظروف المشروع، على سبيل المثال حصلت زيادة في الموارد المتاحة كأن تكون زيادة في الوقت المتاح أو في عدد العمال أو إنتاج منتوج جديد أو غير ذلك، مما يتطلب إعادة حل النموذج للمشكلة بعد إضافة المتغيرات الجديدة.

إن مسألة إعادة حل النموذج يكون مرهقاً وقد يحتاج إلى وقت طويل، ولكن يمكننا استخدام طريقة لا تتطلب إعادة الحل بكامله وذلك باستخدام ما يسمى (تحليل الحساسية Sensitivity Analysis وقد يسمى أيضاً بتحليل ما بعد الأمثلية Post- optimality analysis ويُعرف بأنه عبارة عن دراسة تأثير التغيرات في مكونات المشكلة على نموذج البرمجة الخطية إذ إننا سنقوم بهذا الفصل بدراسة التغيرات التي تطرأ على مكونات النموذج الأولي وكذلك نعتمد على جدول الحل الأمثل دون اللجوء إلى إعادة الحل بكامله مرة أخرى.

إن أهم التغيرات التي تحدث على نموذج البرمجة الخطية الأولي هي:

1. التغيرات في الطرف الأيمن (الموارد المتاحة).
2. التغيرات في معاملات دالة الهدف.
3. التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود.
4. إضافة متغير أو متغيرات جديدة.
5. إضافة قيد أو قيود جديدة .

4-2 التغيرات في الطرف الأيمن (R.H.S) للقيود

Changes in the R.H.S of constraints

بهدف توضيح الحالة الأولى المتعلقة بالمتغيرات في الموارد المتاحة نورد المثال الآتي بعد الحصول على الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

<u>مثال 1</u>

Max $Z= 5x_1+2x_2+3x_3$

s.t

$x_1+5x_2+2x_3 \leq 30$

$x_1-5x_2-5x_3 \leq 40$

$x_1,x_2,x_3 \geq 0$

عندما تكون المتغيرات x_1، x_2، x_3 تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتجات A، B، C على التوالي، ويكون جدول الحل الأمثل على النحو التالي، وعلى افتراض إن S_1، S_2 هي متغيرات وهمية

EX1. From the L.P model, and the optimal solution of this model

B.V	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**B**
X_1	1	5	2	1	0	30
S_2	0	0	-8	-1	1	10
Z	0	23	7	5	0	150

1. Find the optimal solution if the (R.H.S) changes from

$\begin{pmatrix}30\\40\end{pmatrix} to \begin{pmatrix}35\\40\end{pmatrix}$?

2. Find the optimal solution if the objective function changes from (max $Z= 5x_1+2x_2+3x_3$ to max $Z= 3x_1+x_2+3x_3$)

ان الحل الأمثل لهذه المشكلة هو:

$X_1=30, X_2=0, X_3=0, S_1=0, S_2=10, Z=150$

وللتأكد من صحة الحل فإننا نعوض في دالة الهدف

$Z= 5(x_1)+2x_2+3x_3$

$150= 5(30) + 2(0)+ 3(0)$

$150= 150$

أي إن المورد الأول (العمل مثلاً) قد ازداد بمقدار 5 وحدات من $\begin{pmatrix}30\\40\end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix}35\\40\end{pmatrix}$ فإننا لدراسة تأثير هذا التغير على الحل الأمثل للمشكلة نقوم أولاً بالتأكد من إن هذا التغير ليس له أي تأثير في الحل الأمثل ماعدا التغير في الجانب الأيمن وكذلك يجب التأكد من إن قيم صف دالة الهدف سيبقى موجباً أو صفر. نقوم بتعيين مصفوفة المعاملات لمتغيرات الحل الأساسية للحل الأمثل $B=(x_1,S_1)$ في الجدول الأول والتي هي

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

والمعكوس لهذه المصفوفة B^{-1} موجود في جدول الحل الأمثل

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

والتي تمثل مصفوفة المتغيرات المكملة (م. م. م) والتي تقع أسفل المتغيرات المكملة (S_1, S_2) في جدول الحل الأمثل

لذا فإننا نحصل على قيم المتغيرات الأساسية الجديدة بتطبيق المعادلة الآتية:

$$X_b = B^{-1} * b$$

X_b : تمثل عمود المتغيرات الأساسية الناتجة في جدول الحل الأمثل

B^{-1}: تمثل مصفوفة المتغيرات المكملة والتي تقع أسفل المتغيرات المكملة في جدول الحل الأمثل

b: تمثل عمود الموارد المتاحة الجديد

$$\begin{bmatrix}X_1\\S_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}35\\40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35+0\\-35+40\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_1\\S_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35\\5\end{bmatrix}$$

نلاحظ إن جميع قيم العمود الناتج موجبة ويعني ذلك إن الحل لا يزال أمثلاً أو ممكناً باستخدام الموارد المتاحة الجديدة.

$X_1=35, X_2=0, X_3=0, S_1=5, S_2=0$

أما قيمة Z فنحصل عليها بالتعويض وكالآتي:

$Z= 5(35)+2(0)+3(0)$

$Z= 175$

أي إن المتغير في عمود الموارد المتاحة (B) سيؤدي إلى تغير جميع القيم في ذلك العمود الموجود في جدول الحل الأمثل.

لو أخذنا نتيجة الحل النموذج المقابل من الجدول الأخير للمثال نحصل على

$y_1=s_1=10,\ y_2=s_2=0,\ Z=150$

يتبين لنا إن زيادة وحدة واحدة من المورد الأول تؤدي إلى زيادة في دالة الهدف Z بمقدار (5). فعند زيادة المورد الأول في حالتنا بمقدار 5 وحدات، فإن دالة الهدف الجديدة تصبح

$Z= 5(5)+150= 175$

أما الزيادة في المورد الثاني فإنها لا تحقق أي زيادة في دالة الهدف لأنه قيمة ($y_2=s_2=0$) تساوي صفراً.

إن الزيادة في أي مورد من الموارد المتاحة تكون محددة. إذ قد تؤدي الزيادة الكبيرة إلى حل غير أمثل. وبهدف تحديد مقدار الزيادة الممكنة لأي مورد من الموارد تأخذ المثال الآتي:

<u>مثال 2</u>

لو افترضنا إن لدينا مشكلة البرمجة الخطية الآتية

$Max\ Z= 30x_1+50x_2$

s.t

$2x_1+x_2\leq 16$

$x_1+2x_2\leq 11$

$x_1+3x_2\leq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$

وكانت النتائج في جدول الحل الأخير الامثل كالآتي:

B.V	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**B**
S_3	0	0	1/3	-5/3	1	2

X_1	1	0	2/3	-1/3	0	7
X_2	0	1	-1/3	2/3	0	2
Z	0	0	10/3	70/3	0	310

$X_1=7, X_2=2, S_1=0, S_2=0, S_3=2, Z=310$

نفرض إن الزيادة هنا في المورد الأول ولتكن K لذا فإن هذه الزيادة تتحقق إذا تحقق الآتي:

$$\begin{bmatrix} S_3 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16+k \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1/3k \\ 7+2/3k \\ 2-1/3k \end{bmatrix}$$

يلاحظ إن النتائج أعلاه بأن الزيادة في المورد الأول بمقدار وحدة واحدة تؤدي إلى زيادة قيمة x_1 بمقدار $\frac{2}{3}$ وتقليل في قيمة x_2 بمقدار $\frac{1}{3}$. لذا يجب التوقف عندما تصبح قيمة المتغير x_2 مساوية إلى الصفر وعدم السماح بأن تصبح قيمتها سالبة لأن ذلك يؤدي إلى حل غير ممكن. لذلك يتم استخراج قيمة k من القيمة الأصغر (التي تحمل إشارة – سالب) بعد مساواتها بالصفر وكما يلي:

$$2-\frac{1}{3}k=0$$

$$2=\frac{k}{3} \Rightarrow k=6$$

أي إن أعلى زيادة في المورد الأول هي 6 وحدات لكي يبقى الحل ممكناً.

وبنفس الطريقة يمكن أن نحدد الزيادة في أي مورد من الموارد الأخرى. لاحظ إنه في حالة وجود أكثر من مورد تؤثر فيه الزيادة في مورد معين إلى نقصان في قيمته يتم استخراج قيمة (k) منها ومن ثم يتم اختيار أقل قيمة لـ k لغرض اعتمادها.

واجب إلى الطالب لإيجاد الزيادة في المورد الثاني والثالث

1. من $\begin{bmatrix} 16 \\ 11+k \\ 15 \end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix} 16 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$

2. من $\begin{bmatrix}16\\11\\15\end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix}16\\11\\15+k\end{bmatrix}$

والحالة التي يجب دراستها هي أن نفترض أن بإمكان متخذ القرار زيادة قيمة المورد الأول وحدة واحدة (العمل) سوف يكلف متخذ القرار $(\frac{2}{3})$ وحدة نقدية ومن واجبه إن يقارن إذا كانت هذه العملية مربحة أم لا عن طريق المقارنة بين الربح الحاصل من زيادة المورد الأول للمثال (2)

من $\begin{bmatrix}16\\11\\15\end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix}17\\11\\15\end{bmatrix}$ فإننا نحصل على الحل الآتي:

$$\begin{bmatrix}S_3\\X_1\\X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3 & -5/3 & 1\\2/3 & -1/3 & 0\\-1/3 & 2/3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\11\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{17}{3}-\frac{11}{3}+\frac{45}{3}\\\frac{34}{3}-\frac{11}{3}+0\\\frac{-17}{3}+\frac{22}{3}+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{51}{3}\\11\\\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

$\therefore X_1=11, X_2=(\frac{5}{3}),\ S_1=0,\ S_2=0\ S_3=\frac{51}{3}$

اما دالة الهدف فتصبح

Max Z= 30(11)+50$(\frac{5}{3})$, S_1=0, S_2=0 $S_3=\frac{51}{3}$

= 338.33

وعند المقارنة بين الربح الحاصل أعلاه وزيادة كلفة العمل وكما يلي

New Z- old Z= 338.33-310.00= 28.33

فإن هنالك زيادة بالربح بمقدار (28.33) وهي أكثر من $(\frac{2}{3})$ التي هي كلفة القيد الأول (العمل). أي إننا نستنتج بشكل عام إن إضافة وحدة واحدة من العمل هي عملية

مربحة أدت إلى زيادة بالربح بمقدار (28.33) لكل وحدة واحدة من الزيادة بقيد العمل وهذا يمكن تسميته بأسعار الظل (Shadow price) والتي تعرف للقيود المختلفة وهي التي تساعد على تحديد ما مقدار الحصول عليه أو (توفيره) لزيادة المصادر من القيود وحدة واحدة.

إذ من الضروري هنا ملاحظة إن أسعار الظل تعكس التغيير الصافي في قيمة دالة الهدف المثلى لكل زيادة وحدة واحدة في مصادر القيود طالما إن هذه الزيادة في مصادر القيود لا تغير المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل وإنما فقط تسعى لتغيير كمياتها.

وعند إيجاد المدى للتغيير بالنسبة للقيد العمل (زيادة أو نقصان) لذا يكون المتجه الجديد للجانب الأيمن وتفرضه K_1 مثلاً

$$K^* = \begin{pmatrix} k_1 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

ولكي يبقى الحل أمثلاً فإنه يجب أن يكون

$$B^{-1}k^* \geq 0$$

$$B^{-1}k^* = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{3} - \frac{55}{3} + \frac{45}{3} \\ \frac{2k_1}{3} - \frac{11}{3} + 0 \\ \frac{-k_1}{3} + \frac{22}{3} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{3} - \frac{10}{3} \\ \frac{2k_1}{3} - \frac{11}{3} \\ \frac{-k_1}{3} + \frac{22}{3} \end{bmatrix}$$

ويجب أن يبقى $B^{-1}k^*$ موجباً (غير سالب) أي إن:

1. $\frac{-k_1}{3} + \frac{22}{3} \geq 0 \Rightarrow K_1 \leq 22$
2. $\frac{2k_1}{3} - \frac{11}{3} \geq 0 \Rightarrow K_1 \geq 5.5$
3. $\frac{-k_1}{3} + \frac{22}{3} \geq 0 \Rightarrow K_1 \leq 22$

ونستنتج مما تقدم أعلاه بأن سياسة الإنتاج المثلى ستبقى مثلى طالما إن التغيير في قيد العمل (القيد الأول) سيبقى ببين القيمتين ($5.5 \leq k_1 \leq 22$) في حين ستتغير كميات المتغيرات الأساسية (الحل الأمثل) ومقدار الربح المتحقق. وهذا يمكن متخذ القرار إذا كان يرغب بأن يبقى الحل الأمثل أمثلاً من جراء تغير القيد الأول (الجانب الأيمن) وكما يأتي:

$$5.5 \leq k_1 \leq 22$$

ويكون الحل كما يلي:

$$X_1 = \frac{2k_1}{3} + \frac{10}{3},\ X_2 = \frac{-k_1}{3} + \frac{22}{3}$$

وتعتمد قيمة K_1 على المدى أعلاه. وان أعلى قيمة للربح في دالة الهدف تكون

$$\text{Max } Z = 30\left(\frac{2k_1}{3} + \frac{11}{3}\right) + 50\left(\frac{-k_1}{3} + \frac{22}{3}\right) = 10k_1 + 476.66$$

ونلاحظ إنه إذا أخذنا قيمة لـ K_1 أكبر من المدى أعلاه أو أصغر فإننا سوف نحصل على جدول الحل الأمثل يختلف عن الجدول أعلاه فإذا ظهرت قيمة سالبة في عمود ألـ B فإننا يجب أن نقوم بحل الجدول باستخدام طريقة Dual simplex method وعنده سيتم التغير في اتخاذ القرار وفقاً لنتائج الحل الأمثل.

3-4 التغيرات في معاملات دالة الهدف

Changes in coefficients of the Objective Function

لو فرضنا إن دالة الهدف في المثال (1) قد تغيرت من

From Max $Z = 5x_1+2x_2+3x_3$

To Max $Z = 3x_1+x_2+3x_3$

لذا فإن مشكلة البرمجة الخطية سوف تصبح كما يلي:

Max $Z = 3x_1+x_2+3x_3$

s.t

$x_1+5x_2+2x_3 \leq 30$

$x_1-5x_2+6x_3 \leq 40$

فإن النموذج المقابل للمشكلة أعلاه هو

Min $Z= 30y_1+40y_2$

s.t

$y_1+y_2 \geq 3$ …1

$5y_1-5y_2 \geq 1$ …2

$2y_1-6y_2 \geq 3$ …3

$y_1, y_2 \geq 0$

ولغرض إيجاد قيم y_1، y_2 نقوم باحتسابها وفق المعادلة

$$[y_b]=[X_b][B^{-1}]$$

حيث إن

$[y_b]$ صف المتغيرات الناتجة في النموذج المقابل

$[X_b]$ صف معاملات دالة الهدف الجديدة مرتبة حسب المتغيرات الناتجة بجدول الحل الأمثل في دالة الهدف الجديدة.

$[B^{-1}]$ مصفوفة المتغيرات المكملة كما وردت في جدول الحل الأمثل

$$[y_1\ y_2]=[3\ 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=[3+0\ \ 0+0]$$

$$[y_1\ y_2]=[3\ 0]$$

وكما سبق أن أوضحنا بأن التغير في معاملات دالة الهدف يؤدي إلى التغير في صف دالة الهدف كجدول الحل الأمثل فإننا بحاجة لحساب معامل x_1 ومعامل x_2 في جدول الحل

الأمثل وهو يساوي الفرق بين الطرف الأيسر للقيد الأول والطرف الأيمن (الثابت) للنموذج المقابل وكما يلي:

Coefficient of X_i= $(constraint)_i$-B_i

Coefficient of X_1=(y_1+y_2) -3 = (3+0)-3= 0

Coefficient of X_2= $(5y_1-5y_2)$-1= (15-0)-1= 14

Coefficient of X_3= $(2y_1-6y_2)$-3= (6-0)-3= 3

أما قيمة دالة الهدف الجديدة فيمكن الحصول عليها كالآتي

Max Z= $3x_1+x_2+3x_3$=3(30)+0+0= 90

والبيانات موضحة في الجدول أدناه:

B.V	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**B**
X_1	1	5	2	1	0	30
S_2	0	0	-8	-1	1	10
Z	0	14	3	3	0	90

ولايجاد مدى التغير في معاملات دالة الهدف الواردة في مثال (2) للمتغيرات الاساسية اولا (X_1, X_2) فإننا نقوم بافتراض ثبات قيمة معاملX_2 وان معاملX_1 هو C_1 للنموذج الوارد في المثال (2) اعلاه وكالآتي:

Max Z_x= $C_1x_1+50x_2$

s.t

$2x_1+x_2\leq16$

$x_1+2x_2\leq11$

$x_1+3x_2\leq15$

$x_1, x_2\geq0$

وإن النموذج المقابل للمشكلة أعلاه هو

Min Zy= 16 y_1+11y_2+15y_3

s.t

$2y_1+y_2 + y_3 \geq C_1$

$y_1+2y_2 +3 y_3 \geq 50$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

ولغرض إيجاد قيم y_1، y_2، y_3 فإننا نستخدم المعادلة الآتية

$$[y_b]=[X_b][B^{-1}]$$

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3]=[0 \quad c_1 \quad 50]\begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\left[0+\frac{2}{3}c_1-\frac{50}{3} \quad 0-\frac{c_1}{3}+\frac{100}{3} \quad 0\right]$$

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3]=\left[\frac{2c_1-50}{3} \quad \frac{c_1+100}{3} \quad 0\right]$$

وبما إن قيم y_1، y_2، y_3 تكون موجبة دائماً أكبر من الصفر لتحقيق شرط عدم السالبية فإن:

$$\frac{2c_1-50}{3} \geq 0 \ldots 1$$

$$\frac{-c_1+100}{3} \geq 0 \ldots 2$$

من المتباينتين أعلاه يتم

إيجاد مدى التغير في c_1 وكالآتي:

$$\frac{2c_1-50}{3}\geq 0\Rightarrow 2c_1\geq 50 \quad c_1\geq 25$$

$$\frac{-c_1+100}{3}\geq 0\Rightarrow -c_1\geq -100 \quad c_1\leq 100$$

إذاً يصبح مدى c_1 من النتائج التي حصلنا عليها هو:

$25\leq c_1\leq 100$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد مدى التغير في معامل دالة الهدف للمتغير الثاني X_2 وذلك بافتراض بثابت معامل X_1 أي أن تبقى قيمتها (30) كما هي ونفترض إن معامل X_2 في دالة الهدف هو c_2 لنفس المثال (2) الوارد في أعلاه. إن النموذج المقابل للمشكلة أعلاه هو:

$$\begin{aligned} MinZ_y &= 16y_1+11y_2+15y_3 \\ 2y_1+y_2+y_3 &\geq 30 \\ y_1+2y_2+3y_3 &\geq c_2 \\ y_1,y_2,y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ولغرض إيجاد قيم y_1، y_2، y_3 فإننا نستخدم المعادلة الآتية

$$[y_b]=[X_b][B^{-1}]$$

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3]=[0 \quad 30 \quad c_2]\begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\left[0+\frac{60}{3}-\frac{c_2}{3} \quad 0-\frac{30}{3}+\frac{2c_2}{3} \quad 0\right]$$

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3]=\left[\frac{60-c_2}{3} \quad \frac{-30+2c_2}{3} \quad 0\right]$$

ولتحقيق شرط عدم السالبية للنموذج المقابل لذا فإن

$$\frac{60-c_2}{3} \geq 0 \ldots 1$$
$$\frac{-30+2c_2}{3} \geq 0 \ldots 2$$

وباختصار المتباينتين في أعلاه فإننا نحصل على

$$\frac{60-c_2}{30} \geq 0 \Rightarrow 60-c_2 \geq 0 \quad c_2 \leq 60$$
$$\frac{-30+2c_2}{3} \geq 0 \Rightarrow -30+2c_2 \geq 0 \quad c_2 \geq 15$$

إذن يصبح مدى التغير للمعامل X_2 في دالة الهدف هو

$15 \leq c_2 \leq 60$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد ثانياً مدى التغير في معاملات المتغيرات المكملة للنموذج وهي S_1، S_2 ويترك إيجادها كواجب للطالب.

4-4 التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود

Changes in the technological coefficients of decision variable

إن التغيرات في معاملات متغيرات القرار يؤثر مباشرة على عناصر مصفوفة الحل والتي تؤدي إلى التعقيد في الحسابات ويمكن أن تؤشر على الجانب الأيسر لقيود المشكلة المقابلة المتعلقة بها.

وقد تجعل من الحل الحالي للمشكلة حل غير ممكن أو غير مثالي.وعليه فإن تحليل الحساسية في هذه الحالة لن يعطي بيانات مباشرة فيما يتعلق بمثالية أو إمكانية حل المشكلة ولذلك يفضل إعادة حل المشكلة أو حل نموذج البرمجة الخطية من الأساس باستخدام طريقة Simplex method وبعد ذلك ستحصل على متغيرات أساسية ومتغيرات غير أساسية جديدة وفقاً لوصولنا لحل آخر.

4-5 إضافة متغير أو متغيرات جديدة

Addition of anew variable (variables)

لو افترضنا إن النموذج المقابل للمثال (2) السابق ذكره

هو

$$\text{Min } Z= 16y_1+11y_2+15y_3$$

s.t

$$2y_1+y_2+y_3 \geq 35$$

$$y_1+2y_2+3y_3 \geq 55$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

فإذا افترضنا بأننا قمنا بإضافة متغير جديد (x_3) للمشكلة الأصلية.

بحيث إن معاملات المتغير في القيود الثلاثة هي 4، 12, 3على التوالي أما معاملة في دالة الهدف فهو يساوي 40.

نلاحظ بأن شكل القيد في النموذج المقابل يظهر كالآتي:

القيد الجديد $4y_1+2y_2+3y_3 \geq 40$

إن الحل الأمثل للنموذج السابق في جدول الحل الأمثل هو:

$y_1=10/3, y_2= 70/3, y_3=0$

لو عوضنا هذه القيم بالقيد الجديد أعلاه فإننا نحصل على الآتي:

$$4(\frac{10}{3}) + 2(\frac{70}{3}) + 3(0) \geq 40$$

$$60 \geq 40$$

أي إن القيد يتحقق مع قيم الحل الأمثل للنموذج

ولغرض استخراج (حساب) معاملات المتغير الجديد (x_3) في الجدول الأخير يتم ذلك كالآتي:

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أما النتائج في جدول الحل الأمثل الأخير فتظهر كما في الجدول أدناه

B.V	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**B**
S_3	0	0	1	1/3	-5/3	1	2
X_1	1	0	2	2/3	-1/3	0	7
X_2	0	1	0	-1/3	2/3	0	2
Z	0	0	20	10/3	70/3	0	310

نلاحظ في الجدول إن الحل لا يزال مثالياً وذلك لأن معامل x_3 في الصف Z موجب. أما لو فرضنا إن معامل x_3 في دالة الهدف هو 65، نجد إن شكل القيد في النموذج المقابل سيكون كالآتي:

$4y_1+2y_2+3y_3 \geq 65$

ولو عوضنا قيم الحل الأمثل للنموذج المقابل في القيد الجديد نحصل على

$4(10/3)+2(70/3)+3(0) \geq 65$

$60 \geq 65$

أي إن القيد لا يتحقق مع قيم الحل الأمثل للنموذج.

أما النتائج في الجدول الأمثل الأخير فتظهر كما في الجدول الآتي:

B.V	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**B**
S_3	0	0	1	1/3	-5/3	1	2
X_1	1	0	2	2/3	-1/3	0	7
X_2	0	1	0	-1/3	2/3	0	2
Z	0	0	-5	10/3	70/3	0	310

نلاحظ إن الحل لا يتحقق لأن معامل x_3 في الصف Z سالب ومقداره (−5) كما هو واضح في الجدول. لذلك ولغرض الحصول على الحل الأمثل سنقوم باختيار x_3 كمتغير داخل وتكملة الحل لحين الوصول إلى الحل الأمثل.

6-4 إضافة قيد أو قيود جديدة

Addition of new constraint (constraints)

بهدف دراسة تأثير إضافة قيد جديد إلى مشكلة البرمجة الخطية وفي حالة تحقيق هذا القيد باستخدام قيم الحل الأمثل يمكن في هذه الحالة اعتبار هذا القيد قيداً فائضاً لا يؤثر على الحل الأمثل.

مثلاً لو فرضنا إن القيد المراد إضافته للمثال رقم (2) هو القيد

$x_1+4x_2\leq 16$

وبالتعويض عن قيم x_1 ، x_2 الواردة في جدول الحل الأمثل نحصل على

$7+4(2) \leq 16$

$15 \leq 16$

لذا نجد إن القيد يتحقق وعليه يمكن اعتبار هذا القيد فائضاً لا تأثير له على الحل. أما إذا فرضنا إن القيد الجديد هو الآتي:

$x_1+4x_2\leq 13$

وبتعويض قيم x_1 ، x_2 نحصل على

$7+4(2) \leq 13$

$15 \leq 13$

هنا نلاحظ إن القيد أعلاه لا يتحقق.

ولغرض دراسة تأثير هذا القيد على المشكلة يتم إضافة القيد الجديد وهو

$x_1+4x_2+\ldots+s_4=13$

إلى الجدول الأخير للمشكلة بعد استخراج قيم x_1 ، x_2 وتعويضهما في القيد الجديد للحصول على قيم الصف s_4 الذي يتضمن معاملات الصف المطلوب إيجادها وكالآتي:

صف x_1 في الجدول هو

$X_1+(2/3)S_1-(1/3)S_2= 7$

ومنه نحصل معادلة x_1 بدلالة بقية المتغيرات

$X_1= 7-(2/3)S_1+(1/3)S_2$

كذلك بالنسبة إلى X_2 حيث

$X_2-(1/3)S_1+(2/3)S_2= 2$

$X_2= 2+(1/3)S_1-(2/3)S_2$

وبتعويض قيم x_1 ، x_2 في القيد الجديد نحصل على

$$[7-(2/3)s_1+(1/3)s_2]+ 4[2+(1/3)s_1-(2/3)s_2]+ s_4= 13$$

$$(2/3)s_1-(7/3)s_2+s_4= -2$$

لذا فإن الجدول الأخير سيظهر بالشكل الآتي

B.V	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**B**
S_3	0	0	1/3	-5/3	1	0	2
X_1	1	0	2/3	-1/3	0	0	7
X_2	0	1	-1/3	2/3	0	0	2
S_4	0	0	2/3	-7/3	0	1	-2
Z	0	0	10/3	70/3	0	0	310

من الجدول نلاحظ إن عمود الثابت B يحتوي على قيمة سالبة مما يجعل الحل غير ممكن ويتطلب ذلك تطبيق الطريقة المبسطة للنموذج المقابل Dual simplex method للتخلص من قيمة S_4 السالبة.

أسئلة الفصل الرابع

1. From the L.P model

Max Z= $10x_1+12x_2$

s.t

$2x_1+2x_2 \leq 4$

$8x_1+2x_2 \leq 8$

$X_1, X_2 \geq 0$

And the optimal solution of this table

B.V	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**B**
X_2	1	1	½	0	2
S_2	6	0	-1	1	4
Z	2	0	6	0	24

A. Find the optimum solution if the (R.H.S) changes from $\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} to \begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$

B. Find the optimum solution if the objective function changes from (max Z= $10x_1+12x_2$) to (max Z= $10x_1+8x_2$)

2. From the L.P model

$$MaxZ = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

and the optimal solution of this model

B.V	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**B**

X_1	1	5	2	1	0	30
S_2	0	0	-8	-1	1	10
Z	0	A	7	B	c	150

A. Find b_1,b_2 using changes in the (R.H.S)?

B. Find the values of the Dual model (y_1,y_2)= (b,c)?

C. The coeffient of x_2 in the optimal solution table (a)?

D. Find the optimal solution if the objective function changes from (Max Z= $5x_1+2x_2+3x_3$) to (Max Z= $3x_1+x_2+3x_3$)? .

E. Test the optimality of the solution if the (R.H.S) changes from $\begin{pmatrix}30\\40\end{pmatrix} to \begin{pmatrix}20\\30\end{pmatrix}$.

F. Test the optimality of the solution if the (R.H.S) changes from $\begin{pmatrix}30\\40\end{pmatrix} to \begin{pmatrix}25\\30\end{pmatrix}$.

Transportation Models and Assignment Problems

5–1 مقدمة وتعريف نموذج النقل

Introduction and Definition of Transportation Model

5–2 موازنة نموذج النقل **Balancing of Transportation Model**

5–3 أسلوب حل نموذج النقل

Solution Technique of Transportation Model

5– 4 إيجاد الحل الأساسي الابتدائي المقبول

Solution Starting Basic Feasible

5–4–1 طريقة الركن الشمالي الغربي North West –Corner Method

5–4–2 طريقة أقل كلفة Least cost Method

5–4–3 طريقة فوجل Vogel's Approximation Method

5-4-4 طريقة روسيل التقريبية

Russels Approximation Method(R.A.M*)*

5–5 اختيار الحل الأساسي الابتدائي المقبول للحصول على الحل الأمثل

Testing of S.B.F.S for optimal solution

5 –5–1طريقة المسار المتعرج Stepping Stone Method

5–5–2 طريقة عوامل الضرب Multipliers Method

5–6 مشكلة التخصيص Assignment Problem

5–6–1 تعريف نموذج التخصيص Definition of Assignment Model

5-6-2 الطريقة البديلة لطريقة التبديل

Replaced Method of Arranging Method

5–7 طريقة الوحدات One's Method

5-1 مقدمة وتعريف نموذج النقل

Introduction and Definition of Transportation Model

سوف نتناول في هذا الفصل إحدى تطبيقات البرامج الخطية ألا وهو نموذج النقل (نموذج التوزيع) يبحث هذا النموذج في إيجاد القيمة الصغرى لكلفة نقل البضاعة من عدة مصادر للعرض Sources والتي قد تمثل المراكز الإنتاجية أو التسويقية أو المصانع التي تنقل منها البضاعة إلى عدد من محطات الطلب أو مراكز الاستهلاك Destination.

إن الكميات المعروضة عند كل مصدر والكميات المطلوبة في كل موقع يفترض أن تكون معلومة وعلى سبيل المثال المنتج ربما ينقل من البضائع التي تمثل المصادر هنا إلى المخازن المركزية (المواقع).

بالإمكان تحليل مسألة النقل (لتحديد الكميات المثلى التي ستنقل من المصادر إلى المواقع بأقل كلفة نقل ممكنة باستخدام الطريقة العامة المطبقة عند تحليل مسائل البرمجة الخطية (طريقة السمبلكس simplex method) لكن نظراً لطبيعة مسألة النقل الخاصة فقد طورت طرق جديدة لها ميزات خاصة تجعلها ملائمة عند التحليل بشكل أفضل من طريقة السمبلكس وان هذا الأسلوب الجديد في التحليل يختلف عن طريقة السمبلكس في المعالجة الرياضية للمسألة لكنه من حيث المبدأ يلتقي معها تماماً باعتباره يبدأ باختيار الحل الأساسي الابتدائي المقبول Starting Basic Feasible solution S.B.F.S ومن ثم يطور هنا الحل للوصول إلى الحل الأمثل الذي تكون عنده قيمة دالة الكلفة (دالة الهدف) في نهايتاها الصغرى. وسوف نبين في الفقرة التالية التعريف الرياضي العام لنموذج النقل.

ويتضمن نموذج النقل m من مصادر التجهيز، n من محطات (الاستهلاك) إضافة إلى ذلك نفترض إن:

a_i: يمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر من حيث ($i= 1,2,3,\ldots. m$)

b_j: يمثل عدد الوحدات المطلوبة بالبينة للموقع j حيث ($j= 1,2,3,\ldots,n$)

c_{ij}: كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المصدر إلى الموقع j

x_{ij}: عدد الوحدات التي ستنقل من المصدر i إلى الموقع j والجدول الآتي يعرض الصورة الجدولية العامة لنموذج النقل

Destination

	1	**2**	**j…**	**N**	**Supply**
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{ij} X_{ij}	C_{in} X_{in}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{2j} X_{2j}	C_{2n} X_{2n}	a_2
3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{3j} X_{3j}	C_{3n} X_{3j}	a_3
:	:				:
I	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	C_{ij} X_{ij}	C_{in} X_{in}	a_i
:					
M	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	C_{mn} X_{mn}	a_m
Demand	b_1	b_2	b_j	b_n	

اتضح لنا إن الهدف من تحليل نموذج النقل هو تحديد العدد الأمثل من الوحدات التي ستنقل من المصدر i إلى الموقع j بأقل كلفة ممكنة c اعتماداً على هذا الهدف، يمكننا كتابة نموذج البرمجة الخطية المكافئ لنموذج النقل بالشكل التالي

$$Minimize X_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

طبقاً إلى

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = a_i \quad i = 1,2,...m$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_i \quad j = 1,2,...n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

لتسهيل دراسة مشكلة النقل تعرض الصورة الجدولية التالية التي تمثل نموذج نقل مبسطة من n=3, m=2

جدول رقم (2)

TO / From	D_1	D_2	D_3	الكمية المعروضة Supply
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	a_2
Demand	b_1	b_2	b_3	

حيث تمثل C_{11} كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المصدر الأول إلى الموقع الأول وكذلك C_{23} تمثل كلفة نقل الواحدة من المصدر الثاني إلى الموقع الثالث وهكذا أما X_{12} فتمثل عدد الوحدات التي ستنقل من المصدر الاول إلى الموقع الثاني وعلى نفس الأساس تعرف بقيمة قيم X_{ij}

من الجدول 2 يتضح إن الكمية المنقولة من المصدر الأول إلى المواقع الثلاثة يجب أن لا تزيد على الكمية المعروضة (a_1) أي إن

$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq a_1$

وكذلك

$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq a_2$

إضافة إلى ذلك فإن مجموع الكمية المنقولة إلى المصدر الأول يجب أن لا تقل عن احتياج ذلك الموقع وهي b_1. بعبارة أخرى، يجب أن يكون

$x_{11}+x_{21} \geq b_1$

$x_{12}+x_{22} \geq b_2$

$x_{13}+x_{23} \geq b_3$

أما دالة كلفة النقل الكلية (دالة الهدف) فستكون:

$x_0= c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$

واستناداً إلى ما ورد سابقاً يمكننا اختصار تعريف مشكلة النقل بالصورة العامة التالية:

استخرج قيمة x_0 الصغرى حيث

$$X_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

وفقاً إلى مجموعة القيود

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_n \quad j = 1,2,..., n$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j \quad j = 1,2,...., n \qquad . \ . \ 2$$

$$X_{ij} \geq 0 \ \forall (i, j)$$

لو قارنا هذه الصيغة العامة للبرمجة الخطية نلاحظ إن دالة الهدف القيود تمثل صيغة من صيغ البرمجة الخطية لذلك نجد من الممكن استخدام الطريقة العامة المطبقة عند تحليل البرامج الخطية (طريقة السمبكلس).

أن إيجاد الحلول المطلوبة لمشكلات النقل يتم بتحويل قيود المتباينات المشار إليها أعلاه إلى قيود مساواة.

2-5 موازنة نموذج النقل Balancing of Transportation Model

ينتج من التعريف العام لنموذج النقل إن

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

يعني إن الكمية المعروضة في جميع المصادر يجب أن تساوي الكمية المطلوبة كل المواقع ولكن هذا الشرط بالنسبة للمواقع العملي ويعتبر شرط افتراضي إذ قد تكون الكمية المعروضة أصغر أو أكبر من الكمية المطلوبة يكون النموذج غير متوازن "unbalanced" من الجدير بالذكر إن الشرط التوازن بتساوي الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة $(\sum_{i=1}^{m} a_n - \sum_{j=1}^{n} b_j)$ شرط مهماً لتطوير أسلوب النقل. ولكن بالرغم من ذلك فإن أي مسألة عملية بالإمكان جعلها متوازنة بتحويلها إلى مسألة يتساوى فيها العرض مع الطلب فعندما تكون الكمية المطلوبة أكبر من المعروضة يضاف لجدول التكاليف مصدر وهمي Dummy source يعمل على تجهيز الكمية التي حصل فيها العجز والتي مقدارها $(\sum_{j} b_j = \sum_{i} a_i)$

أما إذا كانت الكمية المطلوبة أصغر من المعروضة عندئذ يضاف موقع وهمي Dummy Destination يعمل على امتصاص الكمية المعروضة الإضافية والتي مقدارها $(\sum_{i} a_i - \sum_{j} b_j)$ بقي أن نذكر بأن تكاليف النقل للوحدة الواحدة (C_{ij}) المصدر الوهمي إلى جميع المواقع تساوي صفر لأنها مكافئة إلى عدم نقل أي عدد الوحدات من هذا المصدر، وبالمثل تكون كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصادر إلى الموقع الوهمي تساوي صفر.

3-5 أسلوب حل نموذج النقل

Solution Technique of Transportation Model

تتضمن الخطوات الأساسية لتحليل نموذج النقل ما يلي:

1-تحديد الحل الأساسي الابتدائي المقبول solution starting Basic Feasible (S.B.F.S)

والذي نقصد به يتم المتغيرات X_{ij} التي تحقق كافة القيود الواردة في نموذج النقل. والتي أشرنا إليها سابقاً بالمعادلات التالية

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$$

2- تحديد المتغير الداخل إلى الحل (Entering Variable) من بين المتغير الغير أساسية والتي نتجت من الخطوة الأولى أي بعد تحديد S.B.F.S وتجدر الإشارة إليه. وان عدد المتغيرات التي تكون S.B.F.S يجب أن يساوي m+n-1 والمتغيرات المتبقية (m+n-1)-mn فتمثل مجموعة المتغيرات الغير أساسية Non- Basic Variable فإذا حققت المتغيرات الغير أساسية شروط الأمثلية Optimality Condition الواردة في طريقة السمبلكس (أي إن تأثيرها على قيمة x_0 إيجابي) عندئذ نتوقف عن الحسابات التكرارية ويكون الحل المستخرج في الخطوة الأولى (أي الحل الأساسي الابتدائي المقبول) هو الحل الأمثل. وفيما عدا ذلك نلجأ إلى الخطوة الثالثة.

3- تحديد المتغير الخارج Leaving Variable من مجموعة المتغيرات الأساسية التي تكون أل S.B.F.S ومن ثم سنستخرج حل أساسي جديد ومستمر بالحسابات التكرارية إلى أن نحصل على الحل الأمثل Optimal Solution أي الحل المقبول الذي يجعل قيمة دالة الهدف (دالة الكلفة الكلية) أقل ما يمكن (Minimum)

وسوف نحصل هذه الخطوات بالتفصيل:

وقبل التطرق إلى طرق إيجاد الحل الأساسي الأولي المقبول S.B.F.S لابد من التعرف على الجوانب النظرية الأساسية لنموذج النقل.

نظرية (1)

اثبت إن لمشكلة النقل حل مقبول

البرهان: بما إن

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A$$

(العرض= الطلب)

فإننا نحصل على حل مقبول

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} \quad \forall_{i.j} x_{ij} \geq 0$$

حيث يحقق هذا الحل المقبول القيد الأول كالآتي:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{A} = \frac{a_i A}{A} = a$$

وكذلك يحقق القيد الثاني

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_i \sum_{i=1}^{m} b_j}{A} = \frac{b_i A}{A} = b_j$$

لنفرض إن n=5, m=3

فإننا سوف نحصل على 8 معادلات وكالآتي:

$x_1+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=a_1$ (1)

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=a_2$ (2)

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}= a_3$ (3)

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1$ (4)

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2$ (5)

$x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3$ (6)

$x_{14}+x_{24}+x_{34}=b_4$ (7)

$x_{15}+x_{25}+x_{35}= b_5$ (8)

فإذا جعلنا المعادلة (4) إلى المعادلة (8) وطرحنا من حاصل الجمع المعادلتان (2) و (3) فإن النتيجة التي نحصل عليها المعادلة رقم (1)

من هذا يتبين بأن المعادلة رقم (1) معادلة زائدة redundant وان القيود المتبقية تكون نظام من القيود المستقلة خطياً.

ومن هذا نستنتج بأن هناك معادلة زائدة واحدة فقط في معادلة القيود.

نتيجة (1)

إن الحل الأساسي لمشكلة النقل يتكون من m+n-1 من المتغيرات الأساسية

نظرية (2)

إن الحل الأمثل لمشكلة النقل هو أي حل أساسي مسموح به $X=(x_{ij})_{mn}$ متى ما توفرت $m+n$ من الأعداد $v_1,v_2,\ldots,v_n,u_1,u_2,\ldots,u_m$ بحيث إن

أ. $u_i+v_j=c_{ij}$ لكل أقيام j,i

ب. $u_i+v_j \le c_{ij}$ لجميع قيم j,i وعندما يكون x_{ij} متغيراً أساسياً

البرهان:

ليكن $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})_{mn}$ أي حل أساسي مسموح به باستخدام الفقرتين أ، ب نجد إن

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \ge \sum\sum (v_j + u_i)\bar{x}_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \forall_j \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j b_j + \sum_{i=1}^{m} u_i a_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j)x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} C_{ij}X_{ij}$$

نتيجة (2)

إن إبدال أقيام v_j,u_i المعرفة في (2) ب $v_j+k,\ u_i-k$ على التوالي لأي قيمة محدودة k فإن ذلك لن يؤثر على مضمون النظرية.

من النظرية (2) نستنتج إنه لاختبار أمثلية أي حل أساسي مسموح به لابد من إيجاد أقيام v_j,u_i والتي عددها $m+n$ من حل الفقرة ب. وحيث إن عدد كلف النقل C_{ij} هي $m+n-1$

والتي هي بقدر عدد المتغيرات الأساسية. فهذا يعني إن لدينا m+n-1 من المعادلة الحاوية على m+n من المتغيرات المجهولة v_j,u_i وبالاعتماد على نتيجة (2) نستطيع أن نفرض إن $u_1=0$ دون أن يؤثر ذلك على أقيام v_j,u_i في اختبار أمثلية الحل (أي اختبار قيمة k في النتيجة (2) مساوياً إلى u_1 المعطاة في النظرية (2) وبذلك يكون لدينا m+n-1 من المعادلات الحاوية m+n-1 من المتغيرات المجهولة التي يمكن إيجادها باستخدام التعويض التعاقبي وبعد إيجاد جميع أقيام v_j,u_i نستطيع اختبار أمثلية الحل باستخدام الفقرة ب لتكن

$$c_{ij}= c_{ij}-u_i-v_j$$

نلاحظ إن $c'_{ij}\geq 0$ لكل من قيم j,i تكافئ الشرطين أ، ب وبذلك يكون الحل المرافق لكل من v_j,u_i حلاً أمثلاً متى ما كانت لكل أقيام j,i

$$c'_{ij}= c_{ij}-u_i-v_j\geq 0$$

5- 4 إيجاد الحل الأساسي الابتدائي المقبول

Solution Starting Basic Feasible

يتطلب التعريف العام لنموذج النقل أن تكون الكمية المعروضة مساوية للكمية المطلوبة كما أشرنا إلى ذلك سابقاً. ومن هذا ينتج إن: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

نموذج النقل سيتضمن معادلة واحدة معتمدة والمعادلات الباقية تعتبر مستقلة وهذا يعني إن S.B.F.S. يتكون من (m+n-1) من المتغيرات الأساسية والتي عددها mn-(m+n-1) فهي غير أساسية (أي إن قيمتها تساوي صفر) توجد ثلاث طرق تستخدم لتحديد أل S.B.F.S وهي على الترتيب:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي Northwest- Corner Method

2- طريقة أقل كلفة ممكنة Least Cost Method

3- طريقة فوجل Vogel's Approximation Method (VAM)

5-4-1 طريقة الركن الشمالي الغربي North West –Corner Method

في هذه الطريقة نبدأ بتخصيص أكبر كمية ممكنة للمتغير الواقع في الركن الشمالي الغربي، أي المتغير x_{11}، وحسب الأسلوب الآتي:

1- إذا كانت $b_1 > a_1$ تخصص الكمية a_1 للمتغيرx_{11} . ثم يحذف الصف الأول لأن مجموعه أصبح صفر ونعدل مجموع العمود الأول ثم نأخذ الخلية x_{21} وتخصص قيمة للمتغير x_{21} على ضوء الكمية المعروضة في المصدر الثاني والكمية المطلوبة في الموقع الأول.

2 - أما إذ كانت $b_1 < a_1$ نخصص الكمية b_1 للمتغيرx_{11} . ونحذف العمود الأول ونعدل مجموعة الصف الأول، ثم نستمر بالتخصيص ابتداءً بالمتغير الآخر x_{12}.

3 -أ ما إذا كانت الكمية $a_1 = b_1$ عندئذ نضع x_{11} مساو لأحدهما وفي هذه الحالة سيصبح مجموعة الصف الأول صفر وكذلك العمود الأول صفر. لذلك نأخذ المتغير x_{22} ونخصص له قيمة على ضوء الكمية المعروضة في الصف الثاني والكمية المطلوبة في الموقع الأول.

1 - نستمر بأشغال المربعات حسب الكميات المعروضة في الصف والكميات المطلوبة في العمود إلى أن نحقق العدد (m+n-1) من المتغيرات الموجبة.

2 - في حالة عدم تحقق العدد (m+n-1) من المتغيرات الموجبة سيكون الحل Degenerate Solution، لذلك نكمل هذا العدد باعتبار بعض المتغيرات الغير أساسية والتي لها كلفة نقل أقل ما يمكن c متغيرات أساسية بقيمة تساوي صفر.

مثال رقم 1

استخرج الحل الأساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الآتي:

Example1: Find the solution starting basic feasible to transportation model

جدول رقم 3

T0 / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	10	0	20	11	15
S_2	12	7	9	20	25
S_3	0	14	16	18	5
	5	15	15	10	45

Demand					

الحل: نلاحظ إن النموذج متوازن لأن $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 45$

نبدأ بتحديد قيمة المتغير x_{11} ($a_1=15$, $b_1=5$, $b_1<a_1$) لذلك نخصص قيمة b_1 للمتغير x_{11} ونحذف العمود الأول ونعدل مجموع الصف الأول إلى عشرة، ثم تستمر أفقياً أي نأخذ المتغير x_{12} ($a_1=10$, $b_2=15$, $a_1<b_2$) وعليه تكون قيمة x_{12} تساوي 10. بعد ذلك ننقل للمتغير x_{22} ونخصص له قيمة تساوي 15، بعد ذلك نخصص للمتغير x_{34} والجدول الآتي يلخص هذه الخطوات:

جدول رقم 4

5	10			15-10-0→0
	5	15	5	25-20-5-0
			5	5 0
5	15 5 0	15	10 5 0	

وبهذا يصبح عدد المتغيرات الأساسية (الموجبة) التي تكون الحل الأساسي الابتدائي المقبول ستة متغيرات حسب القاعدة (m+n-1) وهي على الترتيب.

$x_{1\,1}= 5 x_{12} = 10 x_{2\,2}=5 x_{23} = 15 x_{24} = 5 \;\; x_{34}= 5$

واعتماداً على هذه القيم تكون قيمة

$x_0= 5(10)+10(0)+5(7)+15(9)+5(20)+5(18)= 410$

وأخيراً لابد من القول فإن طريقة الركن الشمالي الغربي تحقق العدد المناسب من المتغيرات الأساسية الموجبة (m+n-1) ولكنها لا تستند على مبدأ علمي عند توزيع الكميات المعروضة على مواقع الطلب وبهذا فهي لن تحقق التوزيع الكفؤ الذي يخفض التكاليف. إضافة إلى إنها تتطلب حسابات تكرارية مطولة عند اختبار .S.B.F.S للحصول على الحل الأمثل.

5-4-2 طريقة أقل كلفة Least cost method

يتم توزيع الكميات المعروضة على المطلوبة حسب أقل كلفة نقل ممكنة يتطلب هذا استعراض جدول التكاليف وتحديد أصغر كلفة نقل ممكنة عندئذ نخصص قيمة لهذا المتغير على ضوء الكمية المعروضة في الصف والكمية المطلوبة في العمود (أي الصف والعمود اللذان يحددان موقع هذا المتغير).

بعد ذلك نحدد أصغر كلفة ممكنة أخرى ونخصص قيمة لهذا المتغير وهكذا سنستمر إلى أن يتم توزيع كافة الوحدات المعروضة على المطلوبة.

ويجب أن نلاحظ إنه عندما تتساوى أصغر كلفتين في الجدول فإن الاختيار بينهما يكون عشوائياً. وفيما يلي مثال توضيحي لهذه الطريقة:

مثال رقم (2)

استخراج الحل الأساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الآتي حسب طريقة أقل كلفة ممكنة:

Example2: Find the basic primary solution of Transportation according to least cost method

جدول رقم 5

TO / From	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	1	2	6	7
S_2	0	4	2	12
S_3	3	1	5	11
Demand	10	10	10	30

الحل: نلاحظ أولاً إن النموذج متوازن بعد استعراض جدول الكلف نجد إن ($c_{21}=0$) هي أصغر كلفة– ممكنة، لذلك سنخصص قيمة للمتغير x_{21} (قيمة تساوي b_1 لأن $b_1<a_2$) بعد حذف العمود الأول لأن مجموعة أصبح صفراً، نجد إن أصغر كلفة أخرى هي $c_{32}=1$ وعليه نخصص قيمة للمتغير x_{32} قيمة للمتغير x_{23} (قيمة تساوي 2 لأن $a_2<b_3$، وبعد تعديل مجموع العمود الثالث نخصص قيمة للمتغير x_{33} (قيمة =1) وأخيراً ستكون قيمة المتغير x_{13} مساوية للوحدات السبعة المتبقية والجدول التالي يلخص هذه الحسابات.

جدول رقم 6

	1		2	7	6	

——		——	7 0
10 | 0	4	2 | 2	12 2 0
3	10 | 1	1 | 5	11 1 0
10 0	10 0	10 8 7 0	

من الجدول رقم 6 يتضح إن المتغيرات التي تكون .S.B.F.S هي

$$x_{13}=9 \quad x_{21}=10 \quad x_{23}=2 \quad x_{32}=10 \quad x_{33}=1$$

وقيمة دالة الهدف ستكون

$$x_0= 7(6)+10(0)+2(2)+10(1)+1(5)= 61 \text{ units}$$

3-4-5 طريقة فوجل Vogel s Approximation Method

تعتبر طريقة فوجل أفضل من الطريقتين الأولى والثانية (طريقة الركن الشمالي الغربي وطريقة أقل كلفة ممكنة) عند استخراج S.B.F.S لما تميز به هذه الطريقة من ميزات تمكننا من الحصول على الحل الأمثل لنموذج النقل بصورة مباشرة أو بعد تطبيق عدد صغير جداً من الدورات الخاصة بالحسابات التكرارية.

ونعرض فيما يلي الخطوات الأساسي لهذه الطريقة:

1 - حساب الفرق بين أصغر كلفتين من كل صف ومن كل عمود من جدول التكاليف ويسمى هذا الفرق بكلمة الجزاء Penalty cost.

2- نختار الفرق الأكبر من بين تكاليف الجزاء للصفوف والأعمدة على السواء وفي حالة تساوي بعض الفروق نختار الصف أو العمود المناظر لأعلى فرق عشوائياً.

3- بعد تحديد الصف أو العمود المناظر الأكبر فرق نخصص قيمة للمتغير الذي تكون كلفة نقله ما يمكن في ذلك الصف والعمود أو تكون الكمية المخصصة هي أكبر كمية متاحة لتسديد حاجة الموقع المعني.

1 - نحذف الصف أو العمود الذي أصبح مجموعة صفراً أي الذي تم تحقيقه.

2- نكرر الخطوات الأربعة أعلاه ونستمر إلى أن نوزع جميع الوحدات المعروضة على الوحدات المطلوبة.

وفيما يلي تطبيق لهذه الطريقة على المثال رقم 2.

حيث تم تخصيص أكبر كمية متوفرة في المصدر الثاني للمتغير x_{23} بعد ذلك نحذف العمود الثالث لأن مجموعة أصبح صفراً.

والآن نكرر حساب الفروق للصفوف والأعمدة المتبقية ونختار الصف الثاني المقابل لأكبر فرق وهو 4 ونخصص قيمة للمتغير x_{21} وهذا إلى أن نحصل على الحل الأساس الابتدائي المقبول بالرغم من إن استخراج S.B.F.S بطريقة فوجل يتطلب في بداية الأمر بعض الخطوات الحساسة لكن هذا لا يهم مادام يوفر لنا الحل المطلوب والذي يحقق الحل الأمثل بأقصر عدد ممكن من الخطوات الحسابية.

ويتضح لنا من الجدول رقم 7 إن الحل الأساسي الابتدائي المقبول هو:

$$x_{11}=7,\ x_{21}=2,\ x_{31}=1,\ x_{32}=10$$

جدول رقم 7

T0 / From	D1	D2	D3	Supply	كلفة الجزاء للصفوف
S_1	1 7	2	6	7 0	1 1 1
S_2	0 2	4	2 10	2 0	2 4 -
S_3	3 1	1 10	5	11 1	2 2 2
demand	10 8 1	10 0	10 10 0		

كلف جزاء للاعمدة	1 1 2	1 1 1	3 - -		

Minz=7*(1)+2(0)+10(2)+0(7)+1(B)+10(1)=40

4-4-5 طريقة روسيل التقريبية

Russels Approximation Method(R.A.M)

هذه الطريقة افضل من طريقة فوجل لأنها تعطينا حل ابتدائي أقرب للحل الامثل(خصوصا للمصفوفات الكبيرة) وخطواتها هي:

أ- تحديد أعلى كلفة نقل لكل صف(يرمزلها a^-) ولكل عمود(ويرمز لها b^-).

ب- تشكيل مصفوفة جديدة كلفها هي($C_{ij}^- = (C_{ij} - a^- - b^-)$.

ج- نحدد الخلية التي لها اصغركلفة نقل (C_{ij}^-), ونعطي لمتغيرها أكبر كمية ممكنة والتي تساوي(min.(ai,bj.

د- يحذف الصف(العمود) المتحقق وتغير كمية تجهيز الصف أو طلب العمود الذي تقع فيه الخلية الى مقدار الفرق بين كميتي التجهيز والطلب المقابلة لهما.

ه- 1. اذا بقى صف0عمود) واحد نعطي الصف(العمود)المتبقي كميات الطلب والتجهيز المتبقية

2. اذا بقى اكثر من صف (عمود) واحد نعود للخطوة (أ).

مثال(1): اوجد الحل الاولي لمشكلة النقل بأستخدام طريقة روسيل التقريبية المبينة في الجدول (1).

Example(1): find the starting solution in the following transportation problem by using Russels Approximation Method (R.A.M) which explains in table (1):

	D1	D1	D1	D1	SUPPLY
S1	2	3	4	5	15
S2	3	2	5	2	20

S3	4	1	2	3	25
Demand	8	10	12	15	

بسبب عدم التوازن لان كميات العرض اكبر من كميات الطلب لذلك سنضيف عمود جديد لغرض التوازن.

	D1	D2	D3	D4	D5	SUPPLY
S1	2	3	4	5	0	15
S2	3	2	5	2	0	20
S3	4	1	2	3	0	25
Demand	8	10	12	15	15	60

الحل النهائي الاولي لطريقة رووسل هو:

	D1	D2	D3	D4	D5	SUPPLY
S1	2 (8)	3	4	5	0 (7)	15
S2	3	2	5	2 (12)	0 (5)	20
S3	4	1 (10)	2 (12)	3	0 (3)	25
Demand	8	10	12	15	15	60

جدول الحل النهائي لهذه الطريقة استخرج استنادا للجداول ادناه:

	D1	D2	D3	D4	D5
S1	-7	-5	-6	-5	-5
S2	-6	-6	-5	-8	-5
S3	-4	-6	-7	-6	-4

نملأ الخلية$X24$ ويحذف الموقع D4 :

	D1	D2	D3	D5
S1	-6	-4	-5	-4
S2	-6	-6	-5	-5
S3	-4	-6	-7	-4

نملأ الخلية$X33$ ويحذف الموقع $D3$:

	D1	D2	D5
S1	-5	-3	-3
S2	-4	-4	-3
S3	-4	-6	-4

نملأ الخلية$X32$ ويحذف الموقع $D2$:

	D1	D5
S1	-4	-2
S2	-4	-3
S3	-4	-4

نملأ الخلية$X35$ ويحذف المصدر $S3$:

	D1	D5
S1	-3	-2
S2	-3	-3

نملأ الخلية$X25$ ويحذف المصدر $S2$, لذا تعطى لذا تعطى القيم المتبقية للخليتين الباقيتين$X15,X11$, لبقاء صف واحد.

$T.T.C= 2*8+0*7+2*15+0*5+1*10+2*12+0*3=80$

مثال (2):- اوجد الحل الاولي لمشكلة النقل بأستخدام طريقة روسيل التقريبية المبينة في الجدول (2).

Example (2): find the starting solution in the following transportation problem by using Russels Approximation Method (R.A.M) which explains in table (2):

Table (2)

	D1	D2	D3	supply
S1	5	1	8	12
S2	2	4	0	14
S3	3	6	7	4
demand	9	10	11	30

الحل حسب خطوات طريقة رسل هي:-

	D1	D2	D3	supply
S1	5 (2)	1 (10)	8	12
S2	2 (3)	4	0 (11)	14
S3	3 (4)	6	7	4
demand	9	10	11	30

T.T.C= 5*2+1*10+2*3+0*11+3*4= 38

جدول الحل النهائي لهذه الطريقة استخرج استنادا للجداول ادناه:

	D1	D2	D3
S1	-8	-13	-7
S2	-7	-6	-11
S3	-9	-7	-8

نملأ الخلية X23 ويحذف الموقع D3 :

	D1	D2
S1	-1	-10
S2	-7	-6
S3	-8	-6

نملأ الخلية X12 ويحذف الموقع D2 :

	D1
S1	-5
S2	-5
S3	-5

نملأ الخلية X11 ويحذف الموقع S1 :

	D1
S2	-3
S3	-3

نملأ الخلية X21 ويحذف الموقع S2 :

	D1
S3	-3

نملأ الخلية X31 ويحذف الموقع S3 :

مجموع التكاليف = 38

5-5 اختيار الحل الأساسي الابتدائي المقبول للحصول على الحل الأمثل

Testing of S.B.F.S for optimal solution

تتكون الخطوة الأساسية التالية بعد استخراج S.B.F.S في تحليلات نموذج النقل من اختبار هذا الحل للحصول على الحل الأمثل والذي تكون عنده قيمة دالة الكلفة الكلية أقل ما يمكن. سوف نستخدم فيما يلي طريقتان لاختبار أمثلية S.B.F.S وهما:

1 - طريقة المسار المتعرج Stepping Stone Method

2 - طريقة عوامل الضرب Multipliers Method

5-5-1 1طريقة المسار المتعرج Stepping Stone Method

ذكرنا سابقاً إن عدد المربعات المشغولة في نموذج النقل (أي تلك التي تكون S.B.F.S) يساوي m+n-1 وتسمى هذه المتغيرات بالمتغيرات الأساسية أما المربعات غير المشغولة تسمى بالمتغيرات غير الأساسية ويتمثل الهدف الرئيس للاختبار في دراسة تأثير المتغيرات

الغير أساسية على قيمة دالة الهدف فيما لو تحولت هذه المتغيرات إلى متغيرات أساسية وتتكون الخطوات الأساسية لطريقة المسار المتعرج من:

1- تحديد المتغير الداخل Entering Variable من مجموعة المتغيرات الغير أساسية والمتغير الخارج Leaving Variable من مجموعة المتغيرات التي تكون S.B.F.S من أجل تحديد المتغير الداخل، نرسم مسار مغلق Closed loop لكل متغير غير أساسي. يتكون المسار من مجموعة من قطع المستقيمات المتعاقبة الأفقية والعمودية (أو العمودية والأفقية) بحيث تكون نهاية كل قطعة مستقيم بمتغير أساسي.

وفيما يلي توضيح للمسارات بالنسبة للجدول 8

جدول رقم 8

11 7	2	6
0 2	4	2 10
3 1	1 10	5

المتغيرات غير الأساسية	المسارات المغلقة
x_{12}	$x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12}$
x_{13}	$x_{13} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{13}$
x_{22}	$x_{22} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{22}$
x_{33}	$x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{33}$

علماً إن نقطة بداية المسار يجب أن تكون مشابهة لنقطة النهاية.

2. نحول قيمة المتغير الغير أساسي إلى قيمة موجبة تساوي وحدة واحدة للحفاظ على شروح الحل المقبول (Feasibility Conditions) ويتم هذا التحويل بإعطاء إشارات متعاقبة (1-،1 +، -1، ...) للمتغيرات المكونة للمسار. فمثلاً لو أخذنا المتغير x_{12} وجعلنا قيمة تساوي 1 بدلاً من صفر. فإن هذا يتطلب لو أخذنا x_{11} بمقدار وحدة واحدة كي نحافظ على مجموع الصف الأول وكذلك زيادة قيمة المتغير x_{31} بمقدار وحدة واحدة وبالتالي تقليص

قيمة المتغير x_{32} بمقدار وحدة واحد وبالتالي تقليص قيمة المتغير x_{32} بمقدار وحدة واحدة وهكذا.

3. نفترض إن c_{ij} تمثل مقدار الزيادة الصافية أو النقصان في قيمة دالة الهدف نتيجة تحويل المتغير الغير أساسي x_{ij} إلى متغير أساسي ولو طبقنا الإشارات المتعاقبة على المسارات المستخرجة من الجدول رقم 8 نحصل على:

$$\hat{c}_{12} = c_{12} - c_{11} + c_{31} - c_{32}$$
$$= 2 - 1 + 3 - 1 = 3$$
$$\hat{c}_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{21} - c_{11}$$
$$= 6 - 2 + 0 - 1 = 3$$
$$\hat{c}_{22} = c_{22} - c_{21} + c_{31} - c_{32}$$
$$= 4 - 0 + 3 - 1 = 6$$
$$\hat{c}_{33} = c_{33} - c_{23} + c_{21} - c_{31}$$
$$= 5 - 2 + 0 - 3 = 0$$

4 . إذا كانت جميع قيم $\hat{c}ij \geq 0$ فهذا يعني عدم إمكانية تقليص قيمة دالة الهدف ويكون أل S.B.F.S هو الأمثل.

5. إذا احتوت قيم $\hat{c}_{ij}$ على قيم سالبة عندئذ نبدأ بتطبيق الحسابات التكرارية من أجل تقليص قيمة دالة الهدف وتتضمن هذه الحسابات تحديد المتغير الداخل والخارج ونستمر بتطبيق هذه الحسابات حتى يتحقق الحل الأمثل.

وفيما يلي مثال توضيحي لما ذكر أعلاه:

مثال رقم 3

استخرج الحل الأمثل لنموذج النقل الآتي (m=3, n=2)

Find the optimal solution (TP) if m=3, n=3

جدول رقم 9

5	1	8	12
2	4	0	14
3	6	7	4

9	10	11	

الحل: بعد التأكد من توازن الكميات المعروضة مع المطلوبة استخرجنا الحل الأساسي الابتدائي المقبول بتطبيق طريقة أقل كلفة ممكنة. وكما جاء موضح في الجدول رقم 10.

جدول رقم 10

5 / 2	1 / 10	8	12
2 / 3	4	0 / 11	14
3 / 4	6	7	4
9	10	11	

الآن نقوم باختيار S.B.F.S الموضح في الجدول رقم 10 بطريق المسار المتعرج

$$x_{13} : x_{13}^{+} \to x_{11}^{-} \to x_{21}^{+} \to x_{23}^{-} \to x_{13}$$

$$\hat{c}_{13} = 8 - 5 + 2 - 0 = 5$$

$$x_{22} : x_{22}^{+} \to x_{12}^{-} \to x_{11}^{+} \to x_{21}^{-} \to x_{22}$$

$$\hat{c}_{22} = 4 - 1 + 5 - 2 = 6$$

$$x_{32} : x_{32}^{+} \to x_{12}^{-} \to x_{11}^{+} \to x_{31}^{-} \to x_{32}$$

$$\hat{c}_{32} = 6 - 1 + 5 - 3 = 7$$

$$x_{33} : x_{33}^{+} \to x_{31}^{-} \to x_{21}^{+} \to x_{23}^{-} \to x_{13}$$

$$\hat{c}_{13} = 7 - 3 + 2 - 0 = 6$$

إن جميع قيم $\hat{c}_{ij}$ موجبة إذ عن الحل المستخرج في الجدول رقم 10 يمثل الحل الأمثل الذي تكون عنده قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن

x_0= 2(5)+10(1)+3(2)+11(0)+4(3)= 38

مثال رقم 4

نكرر حل المثال رقم 3 وذلك بعد استخراج الحل الأساسي الابتدائي المقبول طريقة الركن الشمالي الغربي وكما هو موضح في الجدول رقم 11.

جدول رقم 11

12	8	1	5
		3	9
14	0	4	2
	7	7	
4	7	6	3
	4		
	11	10	3

نختبر S.B.F.S بطريق المسار المتعرج

$$x_{13} : x_{13}^{+} \rightarrow x_{23}^{-} \rightarrow x_{22}^{+} \rightarrow x_{12}^{-} \rightarrow x_{13}$$

$$\hat{c}_{13} = 8 - 0 + 4 - 1 = 11$$

$$x_{21} : x_{21}^{+} \rightarrow x_{11}^{-} \rightarrow x_{12}^{+} \rightarrow x_{22}^{-} \rightarrow x_{21}$$

$$-\hat{c}_{21} = 2 - 5 + 1 - 4 = -6$$

$$x_{31} : x_{31}^{+} \rightarrow x_{11}^{-} \rightarrow x_{12}^{+} \rightarrow x_{22}^{-} \rightarrow x^{+}{}_{23} \rightarrow x_{33}^{-} \rightarrow x_{31}$$

$$\hat{c}_{31} = 3 - 5 + 1 - 4 + 0 - 7 = -12$$

$$x_{32} : x_{32}^{+} \rightarrow x_{33}^{-} \rightarrow x_{23}^{+} \rightarrow x_{22}^{-} \rightarrow x_{32}$$

$$\hat{c}_{32} = 6 - 7 + 0 - 4 = -5$$

بما إن قيم لكل من $\hat{c}_{21}$، $\hat{c}_{31}$، $\hat{c}_{32}$ سالبة وعليه فإن لكل من المتغيرات x_{32}, x_{31}, x_{23} يمثل المتغيرات الداخلة وكقاعدة عامة نختار المتغير الذي له أكبر معامل بإشارة سالبة أي المتغير x_{31} لأن ($\hat{c}_{31} = -12$) كي يمثل المتغير الداخل Entering Variable مما يتطلب بالمقابل تحديد المتغير الخارج من مجموعة المتغيرات الأساسية الموجودة في الجدول رقم 11.

يحدد المتغير الخارج من مسار المتغير الداخل باعتباره أول متغير تصل قيمته إلى الضوء ولو أمنعنا النظر في مسار المتغير x_{31} نلاحظ

$$x_{31} : x_{31}^{+} \rightarrow x_{11}^{-} \rightarrow x_{12}^{+} \rightarrow x_{22}^{-} \rightarrow x^{+}{}_{23} \rightarrow x_{33}^{-} \rightarrow x_{31}$$

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -$$

$$9 \qquad 7 \qquad 4$$

وعليه فإن المتغير x_{33} يمثل المتغير الخارج (أي إن المتغير الذي له أقل قيمة عند الزوايا السالبة يمثل المتغير الخارج كما هو الحال في طريقة السمبلكس حيث (المتغير الخارج يناظر أقل نسبة).

عندئذ نقوم بتغير قيمة x_{31} من صفر إلى القيمة الموجبة 4، والجدول التالي يمثل المرحلة الأولى من الحسابات التكرارية:

جدول رقم 12

9 / 5	1 / 7	8
2	4 / 3	0 / 11
3 / 4	6	7

نستخرج فيما يلي قيم $\hat{c}_{ij}$ لكل متغير من المتغيرات الغير أساسية الموضحة في الجدول رقم 12.

$$\hat{c}_{13} = 8 - 1 + 4 - 0 = 11$$

$$\hat{c}_{21} = 2 - 9 + 1 - 4 = -10$$

$$\hat{c}_{32} = 6 - 3 + 9 - 1 = 11$$

$$\hat{c}_{33} = 7 - 0 + 4 - 1 + 9 - 3 = 16$$

في المرحلة الثانية من الحسابات التكرارية نختار المتغير x_{21} كي يمثل المتغير الداخل لأن زيادة قيمته بمقدار وحدة واحدة يؤدي إلى تقليص قيمة دالة الهدف بمقدار عشرة وحدات ($\hat{c}_{21} = -10$). أما المتغير الخارج فيحدد من مسار المتغير x_{21}

$$x_{21} : x_{21}^{+} \rightarrow x_{11}^{-} \rightarrow x_{12}^{+} \rightarrow x_{22}^{-} \rightarrow x_{21}$$
$$5 \qquad\qquad 3$$

وبناء عليه يمثل المتغير x_{22} المتغير الخارج والجدول رقم 13 يمثل المرحلة الثانية من الحسابات التكرارية.

نكرر الاختبار مرة أخرى إلى أن تصبح جميع قيم $\hat{c}_{ij}$ موجبة أو أصغر من تحديد المسارات. توصلنا إلى قيم $\hat{c}_{ij}$

$$\hat{c}_{13} = 8 - 9 + 2 - 0 = 1$$

$$\hat{c}_{22} = 4 - 1 + 9 - 2 = 10$$

$$\hat{c}_{32} = 6 - 1 + 9 - 3 = 11$$

$$\hat{c}_{33} = 7 - 0 + 2 - 3 = 6$$

جدول رقم 13

9 2	1 10	8	12
2 3	4	0 11	14
3 4	6	7	4

	11	10	3

بعد أن أصبحت جميع قيم $\hat{c}_{ij}$ موجبة. نتوقف عن الحسابات التكرارية ليس من الممكن تقليص قيمة الدالة وعليه تكون القيم المثلى للمتغيرات هي:

$x_{31}=4, x_{23}=11, x_{21}=3, x_{12}=10, x_{11}=2$

وقيمة x_0 المثلى:

$x_0= 2(9)+10(1)+3(2)+11(0)+4(3)= 46$ unels

2-5-5 طريقة عوامل الضرب Multipliers Method

تعتمد هذه طريقة على الحسابات التكرارية ولكنها تختلف عن طريقة المسار المتعرج في طريقة تقييم كل متغير من المتغيرات الغير أساسية من ناحية تأثيره على دالة الهدف إن تطور هذه الطريقة يستند في الأساس على نظرية النموذج المقابل (Dual theory) المستخدمة في البرمجة الخطية والتي تطرقنا إليها في الفصل الثالث وسوف نبين فيما يلي الخطوات الأساسية لطريقة عوامل الضرب ثم نوضحها بعد ذلك بالأمثلة:

1. بعد استخراج أل S.B.F.S نعرف عوامل الضرب للصفوف بالمتغير u_i حيث $(i=1,2,\ldots,m)$

وللأعمدة بالمتغير v_j حيث $(j= 1,2,\ldots n)$

2 . .لكل متغير من المتغيرات الأساسية التي تكون أل S.B.F.S

نكتب المعادلة التالية $u_i+v_j=c_{ij}$

وسيكون عدد هذه المعادلات في الواقع $=m+n-1$

نستخرج قيم u_i, v_j من حل المعادلات المستخدمة في الخطوة الثانية يتم حلها بإعطاء قيمة افتراضية لأحد هذه العوامل وللسهولة تعطى قيمة صفر للعامل u_i ثم نستخرج قيم للعوامل الباقية من التعويض المباشر.

نستخدم قيم عوامل الضرب v_j, u_i لاختبار تأثير المتغيرات الغير أساسية على قيمة دالة الهدف فيما حولت هذه المتغيرات إلى متغيرات أساسية مما يتطلب استخراج قيم التي تمثل الزيادة الصافية أو النقصان لكل متغير غير أساس حيث إن:

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - v_i - u_j$$

فإذا كانت جميع قيم $\hat{c}_{ij}$ موجبة أو صفر عندئذ نتوقف عن الحسابات التكرارية ويكون أل S.B.F.S هو الحل الأمثل. أما إذا احتوت قيم: $\hat{c}_{ij}$ على قيم سالبة عندئذ نحدد المتغير الداخل والخارج وسنستمر باستخدام الخطوات المطبقة في طريقة المسار المتعرج.

مثال رقم(5)

استخرج الحل الأمثل للنموذج النقل الآتي:

Ex (5) Find the optimal solution to (TP)

جدول رقم 14

0	4	2	8
2	3	4	5
1	2	0	6
7	6	6	19 / 19

الحل: نستخرج أل S.B.F.S مباشرة باستخدام طريقة أقل كلفة ممكنة النموذج متوازن.

نلاحظ إن من الجدول رقم 14 إن كل من $c_{11}=0$، $c_{33}=0$ لذلك نخصص للمتغير x_{11} أو x_{33}، ولو أخذنا المتغير x_{11} نحصل على الحل الموضح في الجدير ان جدول رقم 14 الذي يوضح أل S.B.F.S وقد اعتبر المتغيرx_{13} متغير أساسي بقيمة تساوي صفر كي نحقق عدد المتغيرات الأساسية والذي يساوي m+n-1

جدول رقم 15

8	2 0	4 1	0 7
5	4	3	2
6	0	2	1
	6	6	7

الخطوة التالية تتمثل في اختبار الحل الأساسي الابتدائي المقبول المعطى في الجدول رقم 15 باستخدام طريقة عوامل الضرب نعرف عوامل الضرب للصفوف ب u_3,u_2,u_1 على الترتيب وللأعمدة ب v_3,v_2,v_1 ثم نكتب مجموعة المعادلات الخاصة بالمتغيرات الأساسية وهي:

$c_{11}=u_1+v_1 \rightarrow 0 = u_1+v_1 \ldots 1$

$c_{12}=u_1+v_2 \rightarrow 4 = u_1+v_2 \ldots 2$

$c_{13}=u_1+v_3 \rightarrow 2 = u_1+v_3 \ldots 3$

$c_{22}=u_2+v_2 \rightarrow 3 = u_2+v_2 \ldots 4$

$c_{33}=u_3+v_3 \rightarrow 0 = u_3+v_3 \ldots 5$

نحلل المعادلات هذه لتحديد قيم (u_3,u_2,u_1) و (v_3,v_2,v_1)

نفرض إن $u_1=0$ من هذا ينتج $v_3=2$ $v_2=4$ $v_1=0$ $u_2=-1$ $u_3=-2$

أما الخطوة الرئيسية التالية بعد تحديد قيم العوامل فهي استخراج قيم $\hat{c}_{ij}$ لكل المتغيرات الغير أساسية والموجودة في الجدول 15 وكما يلي:

$$\hat{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1$$
$$= 2 - (-1) - 0 = 3$$
$$\hat{c}_{23} = c_{23} - u_2 - v_3$$
$$= 4 - (-1) - 2 = 3$$

$$\hat{c}_{31} = c_{31} - u_3 - v_1$$
$$= 1 - (-2) - 0 = 3$$
$$\hat{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2$$
$$= 2 - (-2) - 4 = 0$$

بما ان جميع القيم اعلاه موجبة واصفار .

اذن فأن الحل يعتبر أمثلا .

الجدول التالي يلخص المعلومات المذكورة أعلاه

جدول 16

	$v_1 = 0$	$v_2 = 4$	$v_3 = 2$	
$u_1 =$ **0**	0	4	2	8
	7	1	0	
$\mathbf{u}_2 = -1$	2	3	4	5
	3	5	3	
$u_3 = -2$	1	2	0	6
	3	0	6	
	7	6	6	

إن جميع قيم مثلى $\hat{c}_{ij} \geq 0$ ∴ الحل المستخرج في الجدول رقم 16 يمثل الحل أما قيمة دالة الهدف فتساوي

$x_0 = 7(7)+1\,(4)+5(3)+6(0) = 19$

تمارين وامثلة محلولة

1. استخرج الحل الأمثل لنمو النقل الغير المتوازنة الآتية:

Find the optional solution to (TP) un Balancing

TO / **From**	1	2	3	**Supply**

	5	1	0	20
	3	2	4	10
	7	5	2	15
	9	6	0	15
demand	5	10	15	

مجموع الكمية المعروضة تساوي 60 =15+15+10+20

الكمية المطلوبة تساوي 30 =15+10+5

نضيف موقع وهمي يعمل على امتصاص الكمية المعروضة الفائضة والتي مقدارها (-60 30) وحدة أما التكاليف النقل من المصادر المختلفة، إلى الموقع الوهمي صفر

جدول (17)

TO / From	1	2	3	4	**Supply**
	5	1	0	0	20
	3	2	4	0	10
	7	5	2	0	15
	9	6	0	0	15
demand	5	10	15	30	

نستخرج أل S.B.F.S باستخدام طريقة فوجل

جدول (18)

Rows Penalties									
Columns Denatties	5	1 10	0 0	0	20 10	0	0	0	0
	3 5	2	4	0 5	0 10 5	2 0	2	2	-
	7	5	2	0	15	2	-	-	-

				15	0				
	9	6	0 5	0 10	15 0	0	0	0	0
	5	10	15	30					
	0	0	5	30	25				
	2	1	0	0					
	2	1	0	0					
	-	1	0	0					
	-	5	0	0					

جدول رقم 19

5	1 10	0 10	0	20
3 5	2	4	0 5	10
7	5	2	0 15	15
9	6	0 5	0 10	15
5	10	15	30	

نختبر أل S.B.F.S الموضح في الجدول (19) بتطبيق طريقة عوامل

	$v_{1=}3$	$v_2=1$	$v_3=0$	$v_4=0$
$u_1=0$	5	1	0	0
$u_2=0$	3	2	4	0
$u_3=0$	7	5	2	0
$u_2=0$	9	6	0	0

بعد حساب قيم u_i ,v_j من حل المعادلات التالية

$u_1+v_2=1$ ..... (1)

$u_1+v_3=0$ ..... (2)

$u_2+v_4=0$ ..... (3)

$u_3+v_4=0$ ..... (4)

$u_4+v_3=0$ ..... (5)

$u_4+v_4=0$ ..... (6)

$u_2+v_1=3$ ..... (7)

واستخرج قيم $\hat{c}_{ij}$ الموضحة في الجدول 19 ، نلاحظ إن جميع قيم $\hat{c}_{ij}$ موجبة مما يدل على عدم إمكانية تطوير دالة الهدف وبهذا يكون أل S.B.F.S هو الحل الأمثل

6-5 مشكلة التخصيص: Assignment Problem

تواجه الإدارة مشكلة التخلي عن منتج معين وإحلال منتج آخر محله. وان هنا القرار يتطلب أن يؤخذ في الاعتبار تكاليف الفرص. إن اتخاذ إجراء يعني عدم اتخاذ الإجراء الآخر. لذا فإن الهدف هو تخصيص الأعمال على الآلات أو تخصيص الموظفين على الأعمال المختلفة أو تخصيص البائعين على مناطق البيع.، لتخصيص إجمالي التكاليف وهذا ينخفض من جدول إجمالي تكاليف الفرص .Opportunity costs لنفرض إن لدينا حالة تخصيص m من الأعمال على n من الآلات بضمنها تكاليف الفرص حيث

العملA job= i= 1,2,…,m

الماكنةa machine= j= 1,2,…,n

والهدف هو تخصيص العمل على الآلة j (عمل واحد لكل ماكنة) one job per machine (تخصيص المعقول) بحيث إجمالي التكاليف تصبح أقل ما يمكن (الربح الكلي يصبح أكبر ما يمكن).

إن مشكلة التخصيص هي حالة خاصة من مشكلة النقل حيث الأعمال هنا تمثل المناشيء في مشكلة النقل والآلات هنا تمثل المخازن أو الاتجاهات في مشكلة النقل.

كما إن المتاح عند المنشأ i في مشكلة التخصيص يساوي واحد أي إن $a_i= 1$ لجميع قيم i والمطلوب عند الاتجاه أو المخزن j في مشكلة التخصيص أيضاً يساوي واحد أي إن $b_j=1$ لجميع قيم j.

ولتوضيح مشكلة التخصيص نعطي الجدول الآتي:

الآلة / العمل	1	2	…	n	
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	1
2	c_{12}	c_{22}	…	c_{2n}	1
:					:
M	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	1
	1	1	…	1	

لذا فإنه من الضروري قبل حل مشكلة التخصيص لابد أن يكون عدد الأعمال= عدد الآلات أي m=n ومن ذلك فإن هناك !n من التراتيب الممكنة لعمل مصفوفة التخصيص.

5-6-1 تعريف نموذج التخصيص:

Identifying Specialization Model

يمكن تعريف نموذج التخصيص كالآتي:

المعطى: مصفوفة من مرتبة m×n وتمثل مصفوفة التكاليف $((c_{ij}^{(0)}))$ حيث $c_0 =$ $c_{ij} \geq$ 0 وان $n \geq 3$.

الإيجاد: مصفوفة من مرتبة m×n وتمثل مصفوفة التكاليف $((x_{ij}))$ = x ولذلك فإن النموذج سيكون كالآتي:

دالة الهدف

$$Min(or\,Max)\, x_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij}^{(0)}$$

$$s.to:$$

$$x_{ij} = x_{ij}^2$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} = 1 or\, x_{ij} = 0$$

ومن ذلك يتبين بأن:

أ. عندما يتم تخصيص العمل I على الآلة j-

عندما لا يتم العمل على الآلة j-

ب. العنصر في كل صف أو كل عمود هو الواحد

مثال (1)

في شركة معينة يوجد ثلاثة أعمال يمكن تشغيلها على ثلاث آلات. وكل عمل يمكن تشغيله على آلة واحدة فقط وتكلفة تشغيل أي عمل على كل آلة بالدينار موضح في الجدول التالي. أوجد التخصيص الذي يعطي أقل تكلفة.

الحل: عدد التراتيب الممكنة لعمل التخصيص 6 =3.2.1= 3!= n!

جدول رقم (1)

الآلة / العمل	1	2	3	
1	5	7	9	1
2	14	10	12	1
3	15	13	16	1
	1	1	1	

جدول رقم(2)

الآلة / العمل	1	2	3	
1	1			1
2		1		1
3			1	1
	1	1	1	

X_0= 15+10+16= 31

جدول رقم(3)

الآلة / العمل	1	2	3	
1			1	1
2		1		1
3	1			1
	1	1	1	

X_0=9+10+15= 34

مثال (2):

استخدم المثال السابق لإيجاد مصفوفة التخصيص التي تعطي أقل تكلفة.

Example 2 : Use the former example to find the specialization matrix which is gave the less cost

جدول رقم(4)

الآلة / العمل	1	2	3	
1	5	7	9	P_1= 5
2	14	10	12	P_2= 10
3	15	13	16	P_3= 13

ملاحظة: في حالة عدم وجود صفر على الأقل صفر واحد في أحد الأعمدة نعيد الخطوة الأولى ولكن الاختيار يتهم من الأعمدة.

جدول رقم(5)

الآلة / العمل	1	2	3
1	0	2	4
2	4	0	2
3	2	0	3
	q_1= 0	q_2=0	q3=2

جدول رقم(6)

الآلة / العمل	1	2	3
1	0	2	2
2	4	0	0
3	2	0	1

نخصص العمل 1 للآلة 1، العمل 2 للآلة 3، العمل 3 للآلة 2.

إجمالي التكاليف x_0= 5+12+13= 30

جدول رقم(7)

الآلة / العمل	1	2	3	
1		1		1
2	1			1
3			1	1
	1	1	1	

x_0=7+14+16= 37

جدول رقم(8)

الآلة / العمل	1	2	3	
1	1			1
2			1	1
3	1			1
	1	1	1	

x_0=5+12+15= 30

x_0=9+14+13= 36

جدول رقم(9)

الآلة / العمل	1	2	3	
1		1		1
2			1	1
3	1			1

	1	1	1	

x_0=7+12+15= 34

من هذا يتبين بأن التخصيص الأمثل الذي يعطي أقل كلفة (x_0= 30) هو إن نخصص العمل للآلة1. والعمل 2 للآلة 3 والعمل 3 للآلة 1.

5-6-2 الطريقة البديلة لطريقة الترتيب

Replaced method for arranging method

في هذه الطريقة نرغب في عمل أفضل تخصيص يمكن للأعمال على الآلات نتمكن بواسطة الحصول على إجمالي تكاليف فرص يساوي الصفر أي إن أفضل تخصيص لعمل على آلة هو الذي يتضمن تكلفة فرصة تساوي الصفر.

ويمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة بالشكل الآتي:

1. تحديد جدول تكاليف الفرص.

أ. نختار أصغر قيمة في كل صف p_i أو من كل عمود q_i.

ب. نكون مصفوفة جديدة c_1، وذلك بطرح القيمة الصغيرة من القيم المناظرة لها في الصفوف أو الأعمدة.

1. إن المصفوفة c_1، يجب أن تحتوي على الأقل عنصر واحد يساوي صفر في كل عمود (مربع يحتوي على الصفر).
2. تحديد ما إذا كان هناك تخصيص أمثل. والطريقة هي أن ترسم أقل عدد من الخطوط المستقيمة (عمودياً وأفقياً) خلال جدول إجمالي تكاليف الفرص لتغطية جميع مربعات الصفر. ويمكن الوصول إلى التخفيض الأمثل إذا كان عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة ففي هذه الحالة لا يمكن عمل تخصيص أمثل.
3. يراجع جدول إجمالي تكاليف الفرص.

أ. نختار أصغر رقم في الجدول لم يمر عليه خط. ونطرح هذا الرقم من كل الأعداد التي لم تمر عليها خط.

ب. نجمع الرقم الصغير مع الأعداد الواقعة عند تقاطع أي خطين.

4. نكرر الخطوة (2) للحصول على التخصيص الأمثل.

مثال (3):

في شركة معينة يوجد ثلاثة أعمال (A,B,C) يمكن تشغيلها على ثلاث آلات (D,E,F)، وكل عمل يمكن تشغيله على آلة واحدة فقط، وتكلفة تشغيل أي عمل على كل آلة بالدينار موضح في الجدول التالي. أوجد التخصيص الذي يعطي أقل تكلفة.

EX(3): In a certain company there are three acts (a, b, c) can run on three machines (d, e, f), and every work can be run on one machine only, and the cost of running any action on the each machine dinar as shown in the following table. Find the specialization that gives less expensive.

جدول رقم (10)

الآلة / العمل	D	E	F	
A	25	31	35	P_1=25
B	15	23	24	P_2= 15
C	22	19	17	P_3= 17
	q_1= 15	q_2= 19	q_3= 17	

جدول رقم(11)

الآلة / العمل	D	E	F	
A	10	12	18	P_1= 10
B	0	1	7	P_2= 0
C	7	0	0	P_3= 0

P_4= 0	0	0	7	

هنا بأن التخصيص الأمثل غير ممكن (التخصيص غير معقول) الأمر الذي إلى رسم الخطوط لتغطية كل مربعات الصفر

جدول رقم(12)

الآلة / العمل	D	E	F
A	0	2	8
B	0	1	7
C	7	0	0

إن طريقة الوصول إلى التخصيص الأمثل كالآتي:

أ. نختار أصغر رقم في الجدول لم يمر عليه خط وهذا الرقم هو 1، نطرح هذا الرقم من كل الأعداد التي لم يمر عليها خط.

ب. نجمع الرقم 1 مع الأعداد الواقعة عند تقاطع الخطين. والجدول التالي يوضح ذلك.

جدول رقم(13)

الآلة / العمل	D	E	F
A	0	1	7
B	0	0	6
C	8	0	0

في هذه الحالة فإن التخصيص الأمثل هو:

العمل A للآلة D

العمل B للآلة E.

العمل C للآلة F

إجمالي التكاليف

X_0= 25+20+17= 62

ملاحظة:

إذا كان الهدف هو تعظيم الربح فإننا نختار أكبر قيمة في الجدول ونطرح جميع قيم الجدول منها. $c_{is}^{(0)} = Max c_{ij}^{(0)} - c_{ij}^{(0)}$

أما بقية الخطوات فهي نفسها كما لو كان الهدف هو تخصيص التكاليف.

مثال (4):

دعنا نرى التخصيص التالي:

جدول رقم(14)

منطقة البيع / البائع	a	B	c	D
X	1	8		1
Y	5	7	4	
Z	3	5		2
W	3	1	0	3

نلاحظ أكبر قيمة من الجدول Max=8، نطرح جميع قيم الجدول من الرقم

جدول رقم(15)

منطقةالبيع / البائع	a	b	C	d	
X	7	0	4	7	P_1= 0
Y	3	1	2	3	P_2= 1
Z	5	3	4	6	P_3= 3
W	5	7	2	5	P_4= 2

جدول رقم (16)

منطقة البيع / البائع	a	B	c	d
X	7	0	2	7
Y	2	0	1	2
Z	2	0	1	3
W	3	5	0	3
	$q_1= 2$	$q_2= 0$	$q_3= 0$	$q_4= 2$

جدول رقم (17)

منطقة البيع / البائع	a	B	c	D
X	5	0	4	5
Y	0	0	1	0
Z	0	0	1	1
W	1	5	0	1

نخصص كالآتي:

البائع x على منطقة البيع b

البائع y على منطقة البيع d

البائع z على منطقة البيع a

البائع w على منطقة البيع c

الربح الكلي $x^0= 8+5+3+6= 22$

7-5 طريقة الوحدات One's Method

تعتبر هذه الطريقة من الطرق الحديثة للتعامل مع نماذج التخصيص وتكون كفوء وسهلة التطبيق إذا كانت في حالة تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف لمشكلة التخصيص من الطريقة الأخرى التي تتعامل مع نماذج التخصيص ولغرض تطبيق هذه الطريقة لحل مشكلة التخصيص نتبع الخطوات الآتية:

1. في حالة تعظيم الأرباح أو (تقليل التكاليف)، نجد أكبر عنصر في كل صف من صفوف مصفوفة التخصيص وتضع في الجهة اليمنى من المصفوفة.

2. نقوم بقسمة جميع عناصر الصفوف في كل صف على العناصر الموجودة في الجهة اليمنى للمصفوفة
3. نقوم بإيجاد أقل أو (أكبر) عنصر حسب طبيعة مشكلة التخصيص في كل عمود من أعمدة المصفوفة ونصفه الى كل عمود.
4. نقسم جميع عناصر الأعمدة على كل العناصر الموجودة تحت كل عمود الناظرة له.
5. تغطي جميع الوحدات بأقل عدد ممكن من الخطوط ؟؟، فإذا كانت هذه الخطوط تساوي عدد الصفوف (الأعمدة) فإننا نحصل على الحل الأمثل.
6. أما إذا كانت عدد هذه الخطوط أقل من عدد الصفوف (الأعمدة) فإننا نختار أكبر أو (أحد من) الأرقام الموجودة في المصفوفة الغير مغطاة بهذه الخطوط ونحدد العمود الذي يقع في هذا لعنصر الأكبر أو (الأصفر) ونقسم جميع عناصر هذا العمود على هذا العنصر فقط.
7. ثم نعيد الخطوة رقم (5) والخطوة رقم (6) إلى أن تصل إلى إن عدد الخطوط التي تغطي الوحدات الموجودة في مصفوفة التخصيص مساوية إلى عدد الصفوف (الأعمدة) التي تغطي الوحدات الموجودة في مصفوفة التخصيص مساوية إلى عدد الصفوف (الأعمدة).
8. تبدأ لعملية تخصيص متخصص الوحدات الموجودة في الصفوف التي تحتمل أكبر أو (أقل) عنصر موجود في الجهة اليمنى من مصفوفة التخصيص بالتعاقب.

أما إذا كانت مصفوفة التخصيص غير متماثلة أي عدد الصفوف لا تساوي الأعمدة نضيف صف أو عمود جديد وتكون كلف هذه الصفوف أو الأعمدة الجديدة عبارة على (وحدات). ويتبع نفس الخطوات الحل السابقة.

مثال (1) المصفوفة التالية تمثل مكان توزيع خمسة مهام لكل خمسة مكائن

جدول رقم(1)

Jobs	**Machines**

	M_1	M2	M3	M4	M5
J_1	12	8	7	15	4
J_2	7	9	1	14	10
J_3	9	6	12	6	7
J_4	7	6	14	6	10
J_5	9	6	12	10	6

جدول رقم(2)

Jobs	**Machines**					**R.H.S**
	M_1	M2	M3	M4	M5	Min
J_1	12	8	7	15	4	4
J_2	7	9	1	14	10	1
J_3	9	6	12	6	7	6
J_4	7	6	14	6	10	6
J_5	9	6	12	10	6	6

جدول رقم(3)

Jobs	**Machines**					**R.H.S**
	M_1	M2	M3	M4	M5	Min
J_1	3	2	7/4	15/4	1	4
J_2	7	9	1	14	10	1
J_3	3/2	1	2	1	7/6	6
J_4	7/6	1	7/3	1	5/3	6
J_5	3/2	1	2	5/3	1	6

جدول رقم(4)

Jobs	**Machines**					**R.H.S**
	M_1	M2	M3	M4	M5	Min
J_1	3	2	7/4	15/4	1	4
J_2	7	9	1	14	10	1

J_3	3/2	1	2	1	7/6	6
J_4	7/6	1	7/3	1	5/3	6
J_5	3/2	1	2	5/3	1	6
Min	7/6	1	1	1	1	1

جدول رقم(5)

Jobs	**Machines**					**R.H.S**
	M_1	M2	M3	M4	M5	Min
J_1	18/7	2	7/4	15/4	1	4
J_2	6	9	1	14	10	1
J_3	18/4	1	2	1	7/6	6
J_4	1	1	7/3	1	5/3	6
J_5	18/4	1	2	5/3	1	6

نلاحظ إن عدد الخطوط الوحدات في مصفوفة التحقيق تساوي عدد الصفوف (الأعمدة)=5

$J_2 \rightarrow m_3$ 1
$J_1 \rightarrow m_5$ 4
$J_3 \rightarrow$ 14 6 6= 24
$J_4 \rightarrow$1 6 7
$J_5 \rightarrow$ 2 6 6

مثال (2) شركة لديها مهمات ترغيب شخصيتها على خمسة مكائن وترغب بتشخيص المهمة التالية إلى الماكنة لتحقيق أعلى ربح ممكن والمصفوفة الآتية بين الأرباح التي تحقيق كل مهمة إلى كل ماكنة.

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 11 & 10 & 12 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 14 & 6 \\ 6 & 14 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 9 & 8 & 12 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

1- نستخرج أكبر رقم في كل صف ونضيفه في الجهة اليمنى

1

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 5 & 11 & 10 & 12 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 14 & 6 \\ 6 & 14 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 9 & 8 & 12 & 5 \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} R.H.S(\max) \\ \left.\begin{array}{c} 12 \\ 6 \\ 14 \\ 14 \\ 12 \end{array}\right] \end{array}$$

2- نقسم كل مصفوفة على الأرقام الموجودة في الجهة اليمنى من المصفوفة

2

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0.42 & 0.92 & 0.83 & 1 & 0.33 \\ 0.33 & 0.66 & 1 & 0.5 & 0.83 \\ 0.21 & 0.86 & 0.36 & 1 & 0.43 \\ 0.43 & 1 & 0.28 & 0.78 & 0.5 \\ 0.58 & 0.75 & 0.66 & 1 & 0.46 \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} (\max) \\ \left.\begin{array}{c} 12 \\ 6 \\ 14 \\ 14 \\ 12 \end{array}\right] \end{array}$$

3-نجد أكبر رقم من كل عمود مصفوفة تحت الأعمدة النافذة لها

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0.42 & 0.92 & 0.83 & 1 & 0.33 \\ 0.33 & 0.66 & 1 & 0.5 & 0.83 \\ 0.21 & 0.86 & 0.36 & 1 & 0.43 \\ 0.43 & 1 & 0.28 & 0.78 & 0.5 \\ 0.58 & 0.75 & 0.66 & 1 & 0.46 \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} (\max) \\ \left.\begin{array}{c} 12 \\ 6 \\ 14 \\ 14 \\ 12 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\max \begin{array}{ccccc} 0.58 & 1 & 1 & 1 & 0.83 \end{array}$$

3- نقسم كل عمود على أكبر رقم موجود تحت الأعمدة

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0.71 & 0.92 & 0.83 & 1 & 0.4 \\ 0.57 & 0.66 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0.32 & 0.86 & 0.36 & 1 & 0.51 \\ 0.73 & 1 & 0.28 & 0.78 & 0.6 \\ 1 & 0.75 & 0.66 & 1 & 0.5 \end{array}\right.$$

5 نقوم بتغطية جميع الوحدات الموجودة في مصفوفة التخصص نلاحظ إن عدد الخطوط (أقل من عدد الأعمدة لذلك نختار رقم بين الأرقام الغير مغطاة في مصفوفة التخصيص [83.] الوجود من العمود (dij) رقم 3 ونقسم جميع عناصر هذا العمود على الرقم (83.) فقط

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	(max)
m_1	0.71	0.92	1	1	0.4	12
m_2	0.57	0.66	1.2	0.5	1	6
m_3	0.32	0.86	0.43	1	0.51	14
m_4	0.73	1	0.34	0.78	0.6	14
m_5	1	0.75	0.79	1	0.5	12

6 يتم تخصيص كل رقم (1) في الهدف حسب الرقم الأكبر الموجود في الجهة اليمنى من المصفوفة حسب التوالي

$m_3 \rightarrow J_4$ profit 14
$m_4 \rightarrow J_2$ profit 14
$m_5 \rightarrow J_1$ profit 7
$m_1 \rightarrow J_3$ profit 10

أسئلة وتمارين عامة

1. تملك إحدى منشآت الألبان ثلاثة مصانع لإنتاج الحليب، والطاقة الإنتاجية اليومية للمصانع الثلاث هي على التوالي (6، 1، 10) مليون لتر، أما احتياجات مراكز التوزيع الأربعة التي تعتمد على إنتاج المنشأة فهي (7، 5، 3، 2) مليون لتر على التوالي، والمطلوب تحديد التوزيع الأمثل الذي يحقق احتياجات المراكز الأربعة وبأقل كلفة نقل ممكنة، علماً بأن تكاليف النقل من المصانع إلى المراكز موضحة في الجدول الآتي:

1- One of the installations dairy owns three factories for the production of milk, the daily production capacity of the factories of the three are respectively (6.1, 10) million liters, while the needs of the distribution centers of the four that depend on the production facility are (7, 5, 3, 2) million liters onrespectively, so determine the optimal distribution required that achieves top four needs and at

the lowest possible cost of transporting, note that the cost of transportation from the factories to the centers are shown in the following table:

	D_1	D_2	D_3	D_4	**Supply**
S_1	2	3	11	7	**6**
S_2	1	0	6	1	**1**
S_3	5	8	15	9	**1**
Demand	**7**	**5**	**3**	**2**	**8** / **17**

2. منتج معين ينتج في أربعة مصانع D, C, B, A كلفة إنتاج الوحدة الواحدة في المصانع الأربعة هي 2، 3، 1، 5 والجدول الآتي يبين الكميات المعروضة والمطلوبة وكذلك نقل الوحدة الواحدة من المصانع إلى المخازن. وجد التوزيع الأمثل الذي تكون عنده تكاليف النقل الكلية أقل ما يمكن.

2. A certain production produce in four factories A, B, C, D the cost of one unit in four factories are 2, 3, 1, 5. The following table shows the quantities supplied and demanded, as well as transfer per unit from factories to stores. Found the optimal allocation at which the total transport costs as little as possible.

الاستهلاك / المخازن	1	2	3	4	العرض
A	2	4	6	11	50
B	10	8	7	5	70
C	13	3	9	12	30
D	4	6	8	3	50
الطلب	25	35	105	20	

3. استخرج الحل الأمثل لنموذج النقل الغير متوازن الآتي الذي يحقق أقل كلفة توزيع ممكنة؟.

Q3: Extract the perfect solution to transportation for the following non-balanced model that achieves the lowest possible cost of distribution?.

المصادر	1	2	3	مواقع الاستهلاك
1	5	1	7	**10**
2	6	4	6	**80**
3	3	2	5	**15**
الطلب	**75**	**20**	**50**	**105** / **145**

الفصل السادس

تخطيط جداول الإنتاج باستخدام أسلوب البرمجة الخطية

Using Linear Programming Technique in Planning Master Production Scheduling

6-1 المقدمة **Introduction**

6-2 تخطيط الانتاج **Production Planning**

6-3 التخطيط الاجمالي للانتاج **Aggregate Production Planning**

6-4 ستراتيجيات التخطيط الاجمالي

Aggregate Production Planning Strategies

6-5 الإنتاج الإجمالي **Aggregate Production**

6-6 نماذج تخطيط الإنتاج الإجمالي

Models of Aggregate Product Planning

6-6-1 النموذج الاول للتخطيط الاجمالي

6-6- 2 النموذج الثاني للتخطيط الإجمالي

6-7 نماذج تجزئة التخطيط الإجمالي Disaggregate Models

6-7-1 نموذج جداول الإنتاج لغرض الخزين Optimizing

MPS in a make- to- stock Model

6-7-2 نموذج جداول الإنتاج لغرض الطلب

Optimizing MPS in a make-to- order Model

6-1 المقدمة Introduction

ان الشركات الصناعية تبذل جهدا كبيرا في عملية تخطيط الانتاج وذلك للنهوض بالشركات الى المستوى المرموق الذي تطمح اليه حيث انها تواكب التطور الذي يشهده العالم من حيث تطبيق الاساليب العلمية الحديثة والتي من ابرزها (اساليب بحوث العمليات) في عملية تخطيط واعداد جداول الانتاج الرئيسية التي تعتمد على نماذج رياضية مترابطة وعميقة تمكن الشركة من تحقيق اهدافها في تلبية متطلبات الانتاج والاستغلال الامثل للطاقات المتاحة وتقليل تكاليف العملية الانتاجية ولتحقيق ذلك يتطلب:

1- عمل نموذج رياضي باستخدام اسلوب البرمجة الخطية لعملية تخطيط الانتاج الاجمالي (Aggregate planning) الذي يركز على تجميع الانتاج بشكل عوائل لأن اغلب الشركات الصناعية يتم اعداد خططها الاجمالية على اساس عائلة المنتج والتي هي عبارة عن مجموعات من المنتجات التي تشترك بنفس الامكانيات والموارد التصنيعية وكذلك اوقات التنصيب لغرض الاستغلال الامثل للوقت والكلفة عن طريق استخدام ستراتيجيات التخطيط الاجمالي المتاحة. لتحديد المتطلبات والامكانات المتاحة بشكل اجمالي.

2- عمل نموذج رياضي باستخدام اسلوب البرمجة الخطية لعملية تخطيط الانتاج قصير المدى يقوم بتجزئة العوائل الانتاجية الى منتجاتها النهائية (Disaggrete planning) لغرض اعداد جدول الانتاج الرئيسي اعتمادا على المعلومات التي تم الحصول عليها من نموذج تخطيط الانتاج الاجمالي والذي يبين نوع وعدد المنتجات النهائية التي يجب ان تنتج ومتى يتم انتاجها من خلال معرفة الطاقات الانتاجية المتاحة والمخطط لها في كل مركز من مراكز الانتاج.

6-2 تخطيط الانتاج Production Planning

يعرف تخطيط الانتاج على "انه مجموعة من الانشطة او الاساليب التي ترمي الى اعداد وتنظيم عناصر الانتاج (الايدي العاملة ، المواد الاولية، وسائل الانتاج، رؤوس الاموال) لغرض انتاج حجم معين من السلع خلال فترة زمنية محددة وفق مواصفات معينة وباقل كلفة ممكنة و تخطيط الانتاج يسعى الى تنسيق الانتاج مع بقية اقسام الشركة الاخرى فهو يأخذ بنظر الاعتبار حاجات المبيعات في المستقبل وعلى اساسها يوضع منها الانتاج وماهية المنتجات التي سيقوم بتصنيعها وكمياتها ومتى يجب ان تكون جاهزة للبيع، وكذلك يقدر احتياجات الشركة من المواد الاولية والأدوات والعمال والامكانيات الاخرى، وتقدم هذه المعلومات الى الاقسام المعنية لكي تستطيع تنسيق اعمالها وتهيئة الطلبات بأوقاتها المحددة.

6-3 التخطيط الاجمالي للانتاج Aggregate Production Planning

ان عملية تخطيط جداول الانتاج الرئيسية تعتمد بشكل مباشر على مفهوم التخطيط الاجمالي للانتاج لأنه يعتبر المفتاح الرئيسي لادارة التغيرات في العملية الانتاجية، لأنه يحقق الربط بين عوامل السعة الثابتة طويلة الامد وعوامل السعة المتغيرة والقابلة للتعديل في الامد

القصير مع التركيز على العوامل والخبرة من اجل تحقيق الملائمة الافضل للسعة مع الطلب.

وتبرز اهمية التخطيط الاجمالي من خلال النقاط الآتية:

1- يحمل وسائل الانتاج بصورة كاملة ويقلل الى اصغر حد ممكن من التحميل الزائد والتحميل الناقص، أي انه يعمل على استغلال وسائل الانتاج بشكل كفوء ويعمل على تقليل الضياعات والزيادات في استغلال تلك الوسائل.

2- رسم خطط منهجية منظمة لتغير الطاقات الانتاجية لمواجهة التذبذبات في طلبات الزبائن المتوقعة.

3- خلق سعة انتاجية مؤكدة لغرض تحقيق الطلب المتوقع على السلع الانتاجية.

4- الحصول على مخرجات كبيرة تخص مصادر الانتاج المتوفر.

5- ان وسائل الانتاج (مكائن ومعدات وابنية) ثابتة ولا يمكن توسيعها في الاجل المتوسط.

6- وحدة قياس الطاقات الانتاجية يجب تكون متجانسة، وهذه من اهم سمات التخطيط الاجمالي وذلك لأن المصادر والموارد التي تدخل في العملية الانتاجية تكون وحداتها غير متجانسة القياس. لذلك يتطلب من تخطيط الانتاج الاجمالي توحيد هذه الوحدات القياسية بوحدة قياس متجانسة مثل (رجل/ ساعة، ماكنة/ ساعة)حسب طبيعة كميات الانتاج ومواعيدها خلال فترة تخطيط متوسطة مقبلة 6- 18شهر وذلك من خلال التحكم بمستويات الانتاج، القوة العاملة، الخزين، وقت العمل الاضافي، التعاقد الفرعي، وبعض المتغيرات التي يمكن السيطرة عليها.

4-6 إستراتيجيات التخطيط الإجمالي

(Strategies Aggregate Production Planning)

نظرا لأهمية التخطيط الاجمالي للانتاج ولكونه يؤثر في جميع اقسام الشركة، فإن القرارات التي تتخذ في هذا الاطار ينبغي ان تعكس اهداف الشركة. وهناك عدة خيارات ستراتيجية يتمكن مخططو الانتاج من اتباعها للتغلب على مشكلة تذبذب الطلب. وبغض النظر عن الخيار الستراتيجي لمخططو الانتاج فإنه يتوجب الاجابة على الاسئلة التالية عند صياغة خطة الانتاج الاجمالية:

1- هل ينبغي استخدام الخزين كوسيلة للسيطرة على تقلبات الطلب في اثناء فترة التخطيط المقبلة؟

2- هل نلجأ الى استخدام العمال الوقتيين او تشغيل العمال الحاليين وقتا اضافيا او الموافقة على تكاليف الوقت الغير مستغل للعاملين؟

3- هل ينبغي استخدام القوة العاملة كوسيلة لمواجهة تقلبات الطلب؟

4- هل ينبغي اللجوء الى التعاقد الفرعي لاحتواء تقلبات الطلب مع المحافظة على حجم ثابت من القوة العاملة في الشركة؟

5- هل نلجأ الى تغير الاسعار او تغير عوامل معينة من اجل التأثير في الطلب؟

ان جميع الاسئلة السابقة تمثل ستراتيجيات مشروعة متاحة للتخطيط الاجمالي حيث تتضمن التحكم بالخزين، معدلات الانتاج، مستوى القوة العاملة والطاقات الانتاجية المتاحة.

6-5 الإنتاج الإجمالي Aggregate Production

لغرض إعداد خطط الإنتاج الإجمالية للشركات الصناعية لا بد من عمل نماذج رياضية تأخذ بنظر الاعتبار المنتجات سواء كانت متشابهة على شكل عوائل انتاجية او مختلفة، حيث يتطلب ذلك معرفة تفصيلية ومعالم التخطيط الإجمالي. ولتنفيذ ذلك تم عمل نماذج رياضية متخصص تعتمد على فكرة اسلوب البرمجة الخطية والتي تعتبر من اساليب بحوث العمليات المتخصصة في تخطيط الانتاج. تتكون هذه النماذج الرياضية من دالة هدف ومجموعة من القيود لغرض تنفيذ الخطة الاجمالية بأقل كلفة انتاجية. هناك نوعين من خطط الانتاج الاجمالي وهي:

1- خطة الانتاج الاجمالي التي تعمل على تغير معدل الانتاج (The-Just – in time):

تهدف هذه الخطة الى تغيير في معدل الانتاج لغرض تلبية الطلبات المحددة ضمن الفترات الزمنية المخطط لها، هذه الخطة تكون مناسبة في حالة كون كلف تغيير معدل الانتاج غير مكلفة ورخيصة الثمن بينما تكون كلف الخزين غالية الثمن.

ولتوضيح ذلك نأخذ البيانات الموضحة في الجدول ادناه:

	Dec	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Totals
Working days (ايام العمل)		20	24	18	26	22	15	

Demand (الطلبات)		1280	640	900	1200	2000	1400	
Hiring (عــدد العمــال المستقدمين)		0	0	160	0	305	290	755
Firing (عدد العمال المستغنى عنهم)		34	84	0	27	0	0	145
Workforce (حجم العمل)	300	266	182	342	315	620	910	
Production (الوحــدات المنتجة)		780	640	902	1200	1999	2000	
Inventory (الوحــدات المخزونة)	500	0	0	2	2	0	601	604

Table -1: the just –in –time production plan

نلاحظ من خلال جدول رقم 1 بأن مجموع العمال المستقدمين خلال الفترة التخطيطية (ستة اشهر) هو 755 عامل 145 عامل تم الاستغناء عنهم خلال نفس الفترة التخطيطية وان عدد الوحدات المخزونة من الوحدات المنتجة هي 604 وحدة، ولما كانت كلفة استقدام العامل الواحد خلال الشهر يساوي (80$) وان اجمال الوحدات المنتجة للعامل في اليوم الواحد يساوي (0.14653). لذلك ستكون مجموع كلف العملية الانتاجية تساوي 58.363 $.

2- خطة الانتاج الاجمالي السلسة الغير معقدة (The production-smoothing):

تهدف هذه الخطة على تثبيت معدل الانتاج (Production rate) من خلال الاستفادة من الكميات المخزونة في الفترة الزمنية التي يكون فيها معدل الطلب اقل من معدل الانتاج، وتكون هذه الخطة مناسبة في حالة كون كلف الخزين رخيصة الثمن وكلف تغيير معدل الانتاج غالية الثمن. ولتوضيح ذلك تأخذ البيانات الموضحة في الجدول ادناه:

	Dec	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Totals
Working days (ايام العمل)		20	24	18	26	22	15	
Demand (الطلبات)		1280	640	900	1200	2000	1400	
Hiring (عدد العمال المستقدمين)		111	0	0	0	305	0	111

Firing (عـدد العمـال المستغنى عنهم)		0	0	0	0	0	0	0
Workforce (حجـم العمل)	300	266	182	342	315	620	910	
Production (الوحدات المنتجة)		780	640	902	1200	1999	2000	
Inventory (الوحـدات المخزونة)	500	424	1230	1414	1780	1105	608	6561

Table -2-: The production –smoothing plan

نلاحظ من خـلال جدول رقم –2– بأن مجموع العمال المستقدمين خـلال الفترة التخطيطية (ستة اشـهر) هو 111 عامل، ولا يوجد عمـال (0) يتم الاستغناء عنهم خـلال نفس الفترة التخطيطية وان عدد الوحدات المخزونة من الوحدات المنتجة هي 6561 وحدة، لذلك ستكون مجموع كلف العملية الانتاجية تساوي 57.754$

6–6 نماذج تخطيط الإنتاج الإجمالي

Models of Aggregate Production Planning

وقد تم تطوير نوعين من الموديلات الرياضية لخطط الانتاج الاجمالي عن طريق استخدام اسلوب البرمجة الخطية:

1-6-6 النموذج الاول للتخطيط الاجمالي:

الذي يعمل على تثبيت حجم قوة العمل بدون تغيير عن طريق الاستقدام او الاستغناء عن العمال، والسماح لتغيير معدل الانتاج باستخدام الوقت الاضافي فقط.

تعريف المتغيرات والثوابت **Definition of variables and Constants**

C_{it}: كلفة إنتاج الوحدة الواحدة من العائلة (i) في الفترة الزمنية (t)

H_{it}: كلفةخزن الوحدة الواحدة من العائلة (i) في الفترة الزمنية (t)

R_t: كلفة ساعة العمل في الوقت الطبيعي للعامل الواحد. في الفترة الزمنية (t)

O_t: كلفة ساعة العمل في الوقت الإضافي للعامل الواحد. في الفترة الزمنية (t)

D_{it}: الطلبات المتوقعة للعائلة (i) في الفترة الزمنية (t).

M_i: الوقت المطلوب (رجل ساعة) لإنتاج وحدة واحدة للعائلة (i)

$R`_t$: مجموع ساعات العمل الاعتيادية المتاحة (رجل ساعة) في الفترة الزمنية (t)

$O`_t$: مجموع ساعات العمل الإضافية المتاحة (رجل ساعة) في الفترة الزمنية (t)

I_{io}: مستوى الخزين في بداية الفترة الزمنية للعائلة (i)

T: عدد الفترات الزمنية المخطط لها.

N: عدد العوائل المنتجة.

X_{it}: عدد الوحدات المنتجة من العائلة (i) في الفترة الزمنية (t)

I_{it}: عدد الوحدات المخزونة من العائلة (i) في نهاية الفترة الزمنية (t)

R_t: عدد ساعات العمل الطبيعية المستخدمة في الفترة الزمنية (t)

O_t: عدد ساعات العمل الطبيعية المستخدمة في الفترة الزمنية (t)

الصيغة الرياضية للبرمجة الخطية للموديل الأول:

$$Minimize \sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{T}[c_{it}X_{it} + h_{it}I_{it}] + \sum_{i=1}^{T}[r_t R_t + o_t O_t]$$

Subject to:

$$X_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \; \forall i,t \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_i X_{it} - R_t - O_t = 0 \; \forall t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$0 \le R_t \le R'_t \; \forall t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$X_{it} \ge 0, I_{it} \ge 0 \; \forall i,t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ولغرض تطبيق الموديل الرياضي الأول نستخدم البيانات الموضحة في الجدول أدناه:

	Jan	**Feb**	**Mar**	**Apr**	**May**	**Jun**
Demand (d_{it})	100	100	150	200	150	100
Unit Production cost (C_{it})	7	8	8	8	7	8
Unit- holding cost (h_{it})	3	4	4	4	3	2
Unit- regular labor cost (r_t)	15	15	18	18	15	15
Unit- overtime labor cost (o_t)	22.5	22.5	27	27	22.5	22.5
Available man- hours regular ($R`_t$)	120	130	120	150	100	100

Available man- hours overtime ($O`_t$)	30	40	40	30	30	30

ومن خلال استخدام المعادلات الرياضية للموديل الأول نحصل على الحل الأمثل الموضح في الجدول رقم (4).

	Dec	**Jan**	**Feb**	**Mar**	**Apr**	**May**	**Jun**
Man-hours (R) labor		120	130	120	150	100	100
Man-hours (O) labor		0	17	0	30	30	0
Production (X_{it})		120	147	120	180	130	100
Inventory (I_{it})	3	23	70	40	20	0	0
Optimal cost	$(20193)						

Table-4- Solution to model 1

6-6- 2 النموذج الثاني للتخطيط الإجمالي:

الذي يعمل تغيير قوة العمل عن طريق الاستقدام أو الاستغناء عن العمال، وتثبيت معدل الإنتاج باستخدام الوقت الإضافي والسماح باستخدام أسلوب الطلبيات الراجعة (Backorder).

تعريف المتغيرات والثوابت **Definition of variables and Constants**

C_{it}: كلفة إنتاج الوحدة الواحدة من العائلة (i) في الفترة الزمنية (t)

H_{it}: كلفة خزن الوحدة الواحدة من العائلة (i) في الفترة الزمنية (t)

π_{it} : كلفة الوحدة الواحدة من الطلبية الراجعة من العائلة (i) في الفترة الزمنية (t)

R_t: كلفة ساعة العمل في الوقت الطبيعي للعامل الواحد. في الفترة الزمنية (t)

O_t: كلفة ساعة العمل في الوقت الإضافي للعامل الواحد. في الفترة الزمنية (t)

h_t: كلفة ساعة العمل الواحدة من خلال استقدام العامل الجديد في الفترة الزمنية (t)

f_t: كلفة ساعة العمل الواحدة من خلال الاستغناء عن العامل في الفترة الزمنية (t)

d_{it}: الطلبات المتوقعة للعائلة (i) في الفترة الزمنية (t)

M_i: الوقت المطلوب (رجل ساعة) لإنتاج وحدة واحدة للعائلة (i)

p: نسبت عدد ساعات العمل الإضافي من مجموع ساعات العمل للوقت الاعتيادي.

I_{io}: مستوى الخزين في بداية الفترة الزمنية للعائلة (i).

T: عدد الفترات الزمنية المخطط لها.

N: عدد العوائل المنتجة.

X_{it}: عدد الوحدات المنتجة من العائلة (i) في الفترة الزمنية (t)

R_t: عدد ساعات العمل الطبيعية المستخدمة في الفترة الزمنية (t)

O_t: عدد ساعات العمل الطبيعية المستخدمة في الفترة الزمنية (t)

I^+_{it}: عدد الوحدات المخزونة من العائلة (i) في نهاية الفترة الزمنية (t)

I^-_{it}: عدد الوحدات الراجحة من العائلة (i) في نهاية الفترة الزمنية (t)

H_t: عدد ساعات العمل المتاحة من خلال استقدام العمال الجدد في الفترة الزمنية (t)

F_t: عدد ساعات العمل المتاحة من خلال الاستغناء عن العمال في الفترة الزمنية (t)

الصيغة الرياضية للبرمجة الخطية للموديل الثاني:

$$Minimize = \sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{T}[c_{it}X_{it} + h_{it}I^{+}{}_{it} + \pi_{it}I^{-}_{it}] + \sum_{i=1}^{T}[r_tR_t + o_tO_t + h_tH_t + f_tF_t]$$

Subject to:

$$X_{it} + I^{+}{}_{i,t-1} - I^{+}{}_{it} - I^{-}_{i,t-1} + I^{-}_{it} = d_{it}\ \forall i,t.....(1)$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_i X_{it} - R_t - O_t \le 0 \qquad \forall t.....(2)$$

$$R_t - R_{t-1} - H_t + F_t = 0 \qquad \forall t.....(3)$$

$$O_t - pR_t \le 0 \qquad \forall t.....(4)$$

$$X_{it} \ge 0, I^{+}{}_{it} \ge 0,..I^{-}_{it} \ge 0 \qquad \forall i,t.....(5)$$

$$R_t,..O_t,...,H_t,..F_t \ge 0 \qquad \forall t.....(6)$$

ولغرض تطبيق الموديل الرياضي الثاني نستخدم البيانات الموضحة في الجدول أدناه:

	Jan	**Feb**	**Mar**	**Apr**	**May**	**Jun**
Demand (d_{it})	100	100	150	200	150	100
Unit Production cost (C_{it})	7	8	8	8	7	8
Unit- holding cost (h_{it})	3	4	4	4	3	2
Unit- regular labor cost (r_t)	15	15	18	18	15	15

Unit- overtime labor cost (o_t)	22.5	22.5	27	27	22.5	22.5
Unit- Backorder cost (π_{it})	20	25	25	25	20	15
Hiring cost (h_t)	20	20	20	20	20	20
Firing cost (f_t)	20	20	20	20	20	20

من خلال استخدام المعادلات الرياضية للموديل الثاني للتخطيط الإجمالي نحصل على الحل الأمثل الموضح في الجدول رقم (6).

	Dec	**Jan**	**Feb**	**Mar**	**Apr**	**May**	**Jun**
Man-hours Hired (H_t)		129	0	0	0	0	0
Man-hours Fried(F_t)		0	0	0	0	0	7
Man-hours (R) labor		129	129	129	129	129	129
Man-hours (O) labor		0	0	0	32	0	0
Production (X_{it})		129	129	129	161	129	121
Inventory (I^+it)	3	32	60	39	0	0	0
Unit- Backorder (I^-_{it})	0	0	0	0	0	21	0
Optimal cost	$(19784)						

6-7 نماذج تجزئة التخطيط الإجمالي Disaggregate models

لغرض بناء جدول الإنتاج الرئيسي (MPS) للشركات الإنتاجية لابد من تجزئة التخطيط الإجمالي، أي تجزئة العوائل الإنتاجية إلى مجموعة من المنتجات التي تتكون منها كل عائلة إنتاجية وهنا يكون تخطيط الإنتاج مقسم إلى فترات زمنية أسبوعياً على عكس التخطيط الإجمالي التي تكون الفترات الزمنية شهرياً. ومن خلال تجزئة التخطيط الإجمالي نستطيع تخطيط جداول الإنتاج الرئيسية، التي هي عبارة عن جداول إنتاج يحدد عدد الوحدات أو المكونات الأزمة للإنتاج خلال فترة زمنية معينة فهو بصورة عامة عبارة عن جداول يبين ما الذي ينبغي إنتاجه، وما هي كمياته المطلوبة، ومتى يتم إنتاجه ويجب أن تتسق هذه الجداول مع خطة الإنتاج الإجمالي. وهناك نوعين من النماذج الرياضية باستخدام اسلوب البرمجة الخطية التي تعمل على بناء جداول الإنتاج حسب طبيعة الشركة الإنتاجية.

6-7-1 نموذج جداول الإنتاج لغرض الخزين (Optimizing MPS in a make- to- stock model)

تعريف المتغيرات والثوابت Definition of variables and Constants

(عدد المنتجات التي تتكون منها كل عائلة المطلوب إنتاجه)

n: the number of parts

عدد الفترات الزمنية لجدول الإنتاج الرئيسي المخطط لها

T: the number of periods

كلفة تنصيب المنتجات

A_i: set- up cost for production

(كلفة خزن الواحدة من المنتجات خلال كل فترة زمنية)

h_i: holding cost per unit

الساعات المطلوبة للإنتاج وحدة واحدة من منتجات كل عائلة من العوائل الإنتاجية

كمية الوحدات المنتجة من كل منتج من منتجات العوائل الإنتاجية خلال الفترات الزمنية المخطط لها (وتكون طول الفترة أسبوع)

X^k_{ip}= production quantity of products family (i) in period time

(كمية الخزين من كل منتج في نهاية الفترة)

I_{it}= on hand inventory of product in the end of period

متغير ثنائي= 0 في حالة وجود إنتاج، ويساوي صفر في حالة عدم وجود إنتاج في كل فترة زمنية

Y_{it}= 1 if product is produced in period t, 0 otherwise

(عدد الساعات الإنتاجية المخطط لها ضمن الشهر الواحد والتي تم استنتاجها من نماذج التخطيط الإجمالي

R_t= production hours planning in the periods time (t`)

الصيغة الرياضية للموديل الأول

$$MinZ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{k}\sum_{t`=1}^{T}(A_i^k Y_{it`} + h_i^k I_{it`}^k) \quad \text{دالة الهدف}$$

$$I_{it`}^k = X_{it`}^k + I_{it`}^k - d_{it`}^k \quad i = 1...., n, .. \bar{t} = 1,...., t\, k = 1,...k....(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{k} a_i^k X_{it`}^k \le 1/4(R_t)\, t=1,.T, i=1..n,..\bar{t}=1,..., t\, k=1,.k.....(2)$$

قيد مستوى الإنتاج $X_{it`}^k \le MY_{it`}^k \; k=1,...k\, i=1...n,..\bar{t}=1,..., t.....(3)$

$X_{it`}^k \ge 0, I_{it`}^k \ge 0\, k=1,...k\, i=1...n,..\bar{t}=1,..., t.....(4)$

قيد عدم السالبية $Y_{it`}^k = ()\, k=1,...k\, i=1...n,..\bar{t}=1,..., t..... (5)$

6-7-2 نموذج جداول الإنتاج لغرض الطلب

Optimizing MPS in a make-to- order model

تعريف المتغيرات والثوابت Definition of variables and Constants

$X^k_{it`}$ عدد الوحدات المنتجة من كل منتج من منتجات العوائل الإنتاجية المطلوب إنتاجها في كل فترة زمنية من الفترات المخطط لها (أسبوع)

$I^k_{it`}$ عدد الوحدات من كل منتج من منتجات العوائل والمخزونة في نهاية كل فترة زمنية من الفترات المخطط لها (أسبوع)

$I^{k-}_{it`}$ عدد الوحدات من كل منتج من منتجات العوائل الغير متحققة في نهاية كل فترة زمنية من الفترات المخطط لها (أسبوع)

$d^{0-}_{t`}$ وقت العمل الغير مستغل في كل فترة زمنية من الفترات المخطط لها (أسبوع)

$d^{0+}_{t`}$ وقت العمل الإضافي المستخدم في كل فترة زمنية من الفترات المخطط لها (أسبوع)

d^{3-}_{t} الانحرافات السالبة عن مستوى وقت العمل الإضافي المخطط لها في كل شهر

d^{3+}_{t} الانحرافات الموجبة عن مستوى وقت العمل الإضافي المخطط لها في كل شهر

$d^{1-}_{it`}$ الانحرافات السالبة عن مستوى الإنتاج الإجمالي المخطط له في كل شهر

$d^{1+}_{it`}$ الانحرافات الموجبة عن مستوى الإنتاج الإجمالي المخطط له في كل شهر

$D^{2-}_{it`}$ الانحرافات السالبة عن مستوى الخزين المخطط له للعوائل الإنتاجية في كل شهر

$D^{2+}_{it`}$ الانحرافات الموجبة عن مستوى الخزين المخطط له للعوائل الإنتاجية في كل شهر

π^k_{it}` كلفة الطلبية الغير متحققة للوحدة الإنتاجية الغير متحققة.

W^{3-} كلفة الانحراف السالب لمستوى وقت العمل الإضافي الحالي عن وقت العمل الإضافي المخطط له ضمن الشهر

W^{3+} كلفة الانحراف الموجب لمستوى وقت العمل الإضافي الحالي عن وقت العمل الإضافي المخطط له ضمن الشهر

W^{1-} كلفة الانحراف السالب لمستوى الإنتاج الإجمالي الحالي لمنتج العائلة الحالي عن مستوى الإنتاج الإجمالي لمنتج العائلة المخطط له ضمن الشهر

W^{1+} كلفة الانحراف الموجب لمستوى الإنتاج الإجمالي الحالي لمنتج العائلة الحالي عن مستوى الإنتاج الإجمالي لمنتج العائلة المخطط له ضمن الشهر

W^{2-} كلفة الانحراف السالب لمستوى الإنتاج الإجمالي لمنتج العائلة الحالي عن مستوى الإنتاج الإجمالي لمنتج العائلة المخطط له ضمن الشهر

W^{2+} كلفة الانحراف الموجب لمستوى الإنتاج الإجمالي لمنتج العائلة الحالي عن مستوى الإنتاج الإجمالي لمنتج العائلة المخطط له ضمن الشهر

t` عدد الفترات الزمنية المخطط لها (أسبوع)

n عدد العوائل الإنتاجية

J عدد المراكز الإنتاجية

Li طول فترة الانتظار لإكمال العملية الإنتاجية لكل منتج من منتجات العوائل من مرحلة إصدار أوامر الشراء وأوامر العمل لحين إكمال العملية الإنتاجية.

M الأفق الزمني المخطط لجدول الإنتاج الرئيسي

الفترة الزمنية المحدد (الأسبوع) لبداية العملية الإنتاجية في مراكز الإنتاج

$r^{k}{}_{i,j}$ النسبة المئوية من مجموع ساعات العمل المطلوبة لغرض إنجاز العمليات الإنتاجية لكل منتج من منتجات العوائل في كل مركز من مراكز الإنتاج.

الصيغة الرياضية للموديل الثاني

Objective function

$$Minimize: Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in k_i} \sum_{t` \in N_t} \pi_{it`}^{k} I_{it}^{-k} + \sum_{i=1}^{m} (w^{3-} d^{3-} + w^{3+} d^{3+}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{it}^{m} (w^{1-} d_{it}^{1-} + w^{1+} d_{it}^{1+} \; w_i^{2+} d_{it}^{2+})$$

Subject to:

(القيود)

4 قيد الخزين (The Inventory constraint)

$$I^{k}_{i,t`-1} - I^{k}_{it`} + I^{-k}_{it`} = d^{k}_{it`} .....(1)$$

$$(for = 1,..., n; k \in k; t` \in N_t and t = 1,..., m)$$

5 قيد وقت العمل الاعتيادي والإضافي (The Time Constraints)

$$\sum_{it}^{n}\sum_{k\in k_1}\sum_{im`}^{Li}\sum_{j=1}^{J}(r_{imj`}X_{i.t`+Li-m`}) + d^{0-}_{t`} - d^{0+}_{t`} = (1/4)[R_t - \sum_{i=1}^{n}\beta z(X_{it}].....(2)$$

قيد

$$(for t` \in N, and t = 1,..., m)$$

انحراف وقت العمل الإضافي (Overtime Deviation Constrain)

$$\sum_{t`\in N_t} d^{0}_{t`} + d^{3-}_{t} - d^{3+}_{t} = O_t .....(3)$$

6 قيد انحراف وقت العمل الاعتيادي (Regular Time Deviation Constraint)

$$\sum_{k\in k_1}\sum_{t`\in N_t} X^{k}_{it`} + d^{1-}_{it} - d^{1+}_{it} = X_{it} .....(4)$$

$$(for i = 1,...., n and t = 1,..., m)$$

7 قيد انحراف الخزين (Inventory Deviation Constraint)

$$\sum_{k\in k_1}\sum_{t`\in N_t} I^{k}_{it`} + d^{2-}_{it} - d^{2+}_{it} = X_{it} .....(5)$$

$$(for i = 1,..., n; t = 1,..., m; and t` = 4(t-1)+1,...4(t-1)+4$$

8 عدم السالبية (Non- Negativity Constraint)

$$X^{k}_{it`}, I^{k}_{it`}, I^{-k}_{it`},\ d^{0-}_{t`} d^{0+}_{t`}, d^{2-}_{it}, d^{2+}_{it}, d^{3-}_{it}, d^{3+}_{it}, d^{1-}_{t}, d^{1+}_{t} \geq 0$$

أسئلة وتمارين عامة

1. الجدول التالي يبين الطلب الإجمالي على المراوح لسقفية المنتجة في قسم انتاج المراوح في شركة الصناعات الخفيفة للاشهر 1-6

الشهر	1	2	3	4	5	6
الطلب	400	350	410	420	550	700

وقد توفرت البيانات التالية ايضا:

القوة العاملة الحالية: 9 عامل

كلفة الخزين: 250 دينار/ وحدة/ شهر

كلفة التعاقد الفردي : 4500 دينار/ وحدة/ شهر

اجرة العمل بالوقت الاعتيادي: 7500 دينار/ عامل

اجرة العمل الاضافي: 10.000 دينار/ امل

الوقت اللازم لانتاج الوحدة الواحدة =6 ساعات

كلفة استئجار العامل= 15000دينار/ عامل

كلفة الاستغناء عن العامل : 20.000 دينار/ عامل

يوم العمل: 8ساعات

خزين أول المدة = صفر

خزين أخر المدة = صفر

المطلوب:-

1- اعداد خطط انتاج اجمالية وفق الاستراتيجيات الاتية:

1. استراتيجية التحكم بالخزين.
2. استراتيجية التعاقد الفرعي
3. استراتيجية الحكم بالوقت الاضافي والاعتيادي.
4. استراتيجية التحكم بالقوة العاملة.
5. بين جميع تكاليف التخطيط الاجمالي

2) ترغب الشركة العامة للصناعات الخفيفية بانتاج مضخة ماء (الواتر بم) وتوفرت البيانات التالية من هذه المضخات :

الشهر	1	2	3	4	5	6
الطلب	650	600	750	800	950	850

الطاقات:

الانتاج بالوقت الاعتيادي	500	620	710	650	800	
الانتاج بالوقت الاضافي	200	200	200	200	200	
التعاقد الفرعي	300	300	300	300	300	

خزين اول المدة = صفر

التكاليف:

اجرة العمل بالوقت الاعتيادي: 600 دينار/ عامل/ ساعة

اجرة العمل بالوقت الاضافي: 750 دينار/ عامل/ ساعة

كلفة التعاقد الفرعي: 1100 دينار/ وحدة

كلفة الاحتفاظ بالخزين= 150 دينار/ وحدة/ شهر

المطلوب ايجاد مجموع التكاليف الخطة الاجمالي للانتاج هذا لضمان استخدام جميع سياسات التخطيط الاجمالي المتاحة.

3) يقوم مدير الانتاج للشركة العامة للصناعات الهندسية بتصميم واعداد خطة الانتاج الشاملة للاشهر الستة القادمة وحصل على المعلومات التالية لهذه الاشهر

الفترة	1	2	3	4	5	6
التنبؤ	80	100	125	130	150	75

وكذلك الكلف على النحو التالي:

1- تكلفة الاحتفاظ بالخزين= 10 دينار/ وحدة في نهاية كل شهر.

2- تكلفة نفاذ المخزون= 100 دينار / وحدة بالشهر

3- تكلفة تحويل العمال الى هذا المنتج= 400 دينار / شخص

4- تكلفة تمويل العمال من هذا المنتج= 300 دينار/ شخص

5- المخزون في بداية الفترة = صفر

6- عدد العاملين في بداية الفترة = 16 شخص

7- معدل انتاج الفرد الواحد = (5) وحدة شهريا.

المطلوب: اوجد الخطة الانتاجية الاجمالية لهذه الشركة لتحقيق اقل كلف ممكنة باستخدام الياسات المختلفة.

3 حل المثال الثالث (الشركة الهندسية)

الجدول الاتي يبين السياسات المختلفة

ت	التعامل	1	2	3	4	5	6	المجموع
1-	الطلب المتوقع وحدة	80	100	125	130	150	75	660
2-	الطلب المتوقع التراكم	80	180	305	435	585	660	660
3-	معدل الانتاج الوحدة	90	90	130	13	130	90	660
4-	معدل الانتاج التراكم (وحدة)	90	180	310	440	570	660	660
5-	المخزون نهاية المدة (وحدة)	10	صفر	5	5	صفر	صفر	20
6-	نفاذ الخزين (وحدة)	صفر	صفر	صفر	صفر	15	صفر	15
7-	تكلفة الاحتفاظ بالمخزون (دينار)	100	صفر	50	50	صفر	صفر	200

8-	تكلفة نفاذ المخزن (دينار)	صفر	صفر	صفر	صفر	1500	صفر	1500
9-	عدد العاملين (شخص)	18	18	26	26	26	18	-
10-	تكلفة تقليل العاملين (دينار)	800	صفر	3200	صفر	صفر	2400	6400
11-	التكلفة الكلية (دينار)	900	صفر	3250	50	1500	2400	8100

ملاحظات حول الجدوي

1- معدل الانتاج (الصف 3) = مجموع الطلب المتوقع /6=660/6=10

2- المخزون نهائية المدة (صف 5) = الصف 4- (الصف 1)+المخزون في بداية المدة

3- تكلفة الاحتفاظ (الصف 7) = الصف 5 × 10 دينار

4- تكلفة نفاذ المخزون (الصف 8) = الصف 6×100

الفصل السابع

نظرية المباراة Game Theory

7-1-المقدمة Introduction

7-2- المباراة ذات المجموع الصفري (المستقرة) Zero Sum Game

7-3- معيار الادنى – الاقصى, الاقصى – الادنى.

Minimize , Maximum Criterion

7-4- استعمال الهيمنة Using Dominances

7-5-مباراة عدم التوازن (غير المستقرة) Game Without saddle point

7-5-1- طريقة المزيج بين الستراتيجيات Mixed strategies method

7-5-2- الطريقة الحسابية Arithmetical method

7-5-3- طريقة الاحتمالات المشتركة Joint probabilities method

7-6- المباراة ذات الابعاد 2×M أو M×2

Game with Dimensions M*2 or 2*M

7-6-1- طريقة السيطرة Dominances method

7-6-2- طريقة المباراة الفرعية Sub Game method

7-6-3- طريقة المعادلات الخطية Linear Equation method

7-6-4- الطريقة البيانية Graphical method

7-6-5 البرمجة الخطية Linear Programing

نظرية المباريات Game Theory

7-1 المقدمة: Introduction

تشير كلمة (Game) إلى مواقف التنافس أو الصراع بين الخصوم (اشخاص أو جماعات) ذوي الاهداف المتعارضة وكل لاعب يمتلك مجموعة من الاستراتيجيات المتاحة التي تكون معروفة لدى الخصم (لكلا الطرفين المتنافسين) لكن أي منهما لا يعرف الاستراتيجية التي سوف يستخدمها اللاعب المتنافس تجاه الاخر.

كسب اللاعب (Player) ما يخبره اللاعب الاخر فانه تسمى المباراة الصفرية (Zero-sum-Game) وهذا النوع من المباراة هو الاكثر شيوعاً في عالم الادارة وهذا النوع من المباراة سوف يؤخذ بنظر الاعتبار كما يجب العلم ان هناك بعض مواقف الصراع والتنافس ضد تتضمن كسب أو خسارة لكلا المتنافسين تسمى (المباراة ذات المجموع غير الصفري) والهدف من نظرية المباراة هو تحديد افضل استراتيجية من ظل اللاعب على افتراض ان خصمه عقلاني ورشيد وذكي وسيقوم بتحركات مضادة ذكية.

2-7 المباراة ذات المجموع الصفري المستقرة (Zero – sum Game)

التعارض التام هو صفة هذا النوع من المباريات فما يحصل عليه من كسب يمثل خسارة الطرف الاخر والنتيجة تكون هي الصفر للطرفين, وعلى هذا الاساس يسعى كل طرف أما لاختيار الاستراتيجية التي تعظم من منافعة في حالة الارباح أو إلى اختيار استراتيجية التي تعمل على تخفيض خسارته إذا كان في حالة الخسارة أو طبيعة المشكلة تظهر هناك طرف يكسب (A) وطرف يخسر هو (B) ولتصور ذلك نأخذ المثال التالي المصفوفة التالية:

		B اللاعب	
A اللاعب	1	70	-50
	2	80	100

تتميز هذة المباراة بوجود طرفين متنافسين وان مايكسبة احد الاعبين يساوي تماما مايخسرة الاعب الاخر وهذا النوع من المباراة يمكن حلة بالجبر الاعتيادي او جبر المصفوفات.

3-7 الاستراتيجية المثلى ونقطة التوازن (Pure strategy and saddle poin)

لو ان كل لاعب من اللاعبين سوف يختار ستراتيجية واحدة يلعبها طول الوقت طالما كانت المباراة قائمة وبالتالي سوف يكون الدفع المتحقق في هذه الحالة أي عندما يلعب كل لاعب الاستراتيجية المثلى (Optimal pure strategy) نقطة التوازن (saddle point) واي هي عبارة عن قمة المباراة عندما

يلعب كل لاعب عن اللاعبين استراتيجية المثلى أو الخالصة (Pure strategy) وانى يمكن تحدديها بانها اصغر قيمة عددية في صف الاستراتيجية المثلى واكبر قيمة عددية في محدد الاستراتيجية المثلى إلى ان اللاعب (A) سوف يحصل على دفع مادي لاكبر قيمة عددية من أي حق بينما يحصل اللاعب B على دفع مساوي لاكبر قيمة عددية في أي محدد وعندما تكون هناك قيمة عددية وهذه تحقق من المصفوفة اعلاه نجد ان ربح الطرف (A) يعبر عنه (aij) أي يجب ان تكون اكبر من صفر (aij>0) وفي نفس الوقت تعبر عن خسارة الطرف (B) إذا كانت (aij>0) لأن ذلك يعني ان الطرف (A) إذا اختار استراتيجية (i) واختيار الطرف b لاستراتيجية (j) فان ذلك يعرف ان الطرف B سوف يخسر امام اللاعب (A) بما مقدار (aij) ولتوضيح ذلك نتعرف على المثال التالي:

مثال (1): احسب وصفياً الفائز بالمباراة وقيمة المباراة

Ex(1) Find the value of the Game and the Winner

	اللاعب B		
اللاعب A	1	50	-60
	2	30	100

في المثال اعلاه تشير الارقام الموجبة إلى كسب اللاعب الذي يلعب الصفوف في حين تشير السالبة إلى كسب اللاعب الذي يلعب الاعمدة فلو القيت نظرة إلى المصفوفة اعلاه تبين ان الافضل للاعب (A) ان يلعب ستراتيجية الاولى لانها تضمنت له الكسب مهما كانت الاستراتيجية التي سوف يلعبها اللاعب (B) فاذا اختار اللاعب B هذا الشرط (نقطة التوازن) معنى ذلك ان كلا اللاعبين يلعبان بطريقة مثلى ولكن على الدوام تكون هناك توازن في كل مباراة ولكن في حالة وجود نقطة توازن فان اللاعبين الذي يغير استراتيجية مع بقاء اللاعب الاخير محافظاً على ستراتيجية المثلى عبر (نقطة التوازن) فان اللاعب الذي غير ستراتيجية المثلى سوف لن يستطيع زيادة عوائده أو تقليل خسائره لتعد الان.

7- 3 مفهوم الادنى-الاقصى Minimize , Maximum Criterion

يغير هذا المعيار اكثر تحفظاً لانه يعتمد على عمل الاحسن من بين كل الظروف الممكنة فاذا كانت الخسارة تمثل النتيجة لمتخذ القرار فانه للستراتيجية المعينة (ai) تكون الخسارة الاسوى هي القيمة القصوى.

وحسب هذا المعيار يتم اختيار الاقل من بين الاعظم للسياسات المختلفة ولهذا سمي (Min Max).

(مثال2) حل مصفوفة المباراة التالية باستخدام (Min Max) or (Max Min).

(Example 2) Solve Matrix Game following by using (Min Max) or (Max Min).

اللاعبB			
اللاعب A		Q1	Q2
	P1	70	-60
	P2	100	90

سوف تختار اقل قيمة من كل صف ومن ثم تختار اكبر قيمة من بين القيم الاقل في الصفوف وتختار اكبر قيمة في كل عمود من الاعمدة ومن ثم تختار اقل القيم من بين اكبر القيم في الاعمدة وبالتالي ستكون القيمة (70) اعلى الاقل في الصف (Max Min) والقيمة (70) اقل الاعلى في العمود (Min Max) أي ان الاعلى الاقل من الصف تساوي الاقل الاعلى في العمود مما يعني ان هناك نقطة توازن (70) هي قيمة المباراة (Value of The Game) وهي تعتبر اقل ربح للاعب A داخل خسارة للاعب B.

اللاعبB				Row Min
اللاعب A		Q1	Q2	
	P1	70	-60	-60
	P2	100	90	90
Column Max		100	90	

4-7 الهيمنة Dominance

في كثير من الاحيان يتم حذف بعض الاستراتيجيات الخاصة بهذا الطرف أو ذلك عندما تتفوق عليها استراتيجيات اخرى وبالاخص عندما تكون المباراة ذات المجموع الصفري إلى ما يربحه طرف يخسره الاخر وإليك المثال رقم (3).

(مثال 3) اوجد قيمة المباراة باستخدام طريقة الهيمنة.

Ex.3 Compute the value of the Game using Dominances method.

اللاعب A	اللاعب B			
		Q_1	Q_2	Q_3
	P_1	10	8	8
	P_2	18	6	4
	P_3	-10	4	-2
	P_4	0	6	4

من البيانات الواردة في المصفوفة نلاحظ ان ستراتيجية اللاعب (A): (4, 2, 1) تتفوق على (3) فاذا لعب اللاعب B الاستراتيجية (1) فان اللاعب (A) يربح (10) في الاستراتيجية (1) ويخسر (10) في الاستراتيجية (3) أما إذا لعب اللاعب (B) الاستراتيجية (2) فان اللاعب A يربح (8) في ستراتيجية (1) ويربح (4) في ستراتيجية (3) أما إذا لعب اللاعب (B) ستراتيجية (3) فان اللاعب A يربح (8) في ستراتيجية (1) ويخسر (2) في ستراتيجية (3) لذلك يفضل اللاعب A ستراتيجية (1) على ستراتيجية (3) اضافة إلى تفوق الاستراتيجيات (1) و (2) على ستراتيجية (4) أما اللاعب (B) حيث يلاحظ ان الاستراتيجية (3) تتفوق على ستراتيجية (2) ومن هنا يمكن اختصار المصفوفة الاصلية.

اللاعب A	اللاعب B		
		1	3
	1	10	8
	2	18	4

إذا نظرنا إلى البيانات الواردة في المصفوفة اعلاه نلاحظ ان اللاعب (B) يستطيع الاستراتيجية الاولى (1) بسبب تفوق (3) عليها في حين بالنسبة للاعب A لا توجد استراتيجية متفوقة احدهما على الاخرى لذا يكون شكل المصفوفة في النهاية

اللاعبA	اللاعب B	
		3
	1	8
	2	4

مما ورد اعلاه نستنتج ان اللاعب (A) يستطيع اللعب بالاستراتيجية الاولى واللاعب B يستطيع اللعب بـ (3) وفي هذه الحالة يكون (A) كسب (8) وبالمقابل (B) خسر (8).

7-5 مباراة عدم التوازن Game without as addle point

في الامثلة السابقة يتبين ان هناك نقطة توازن والتي من خلالها يمكن تحديد الاستراتيجيات المثلى التي يجب ان يمارسها المشاركين في المباراة طول الوقت, الا ان هناك من المباراة التي لا يمكن لا يكون فيها نقطة توازن وبالتالي لا يمكن ايجاد قيمتها باستخدام المعايير السابقة وبالتالي يتطلب استخدام احدى الطريقتين.

7-5-1 طريقة المزيج من الاستراتيجيات Mixed strategies Method

تعتمد هذه الطريقة على استخدام مزيج من الاستراتيجيات بدلاً من تطبيق واحدة طول الوقت وفي هذه الحالة فان كل طرف من المباراة سيحاول تطبيق كل ستراتيجية وفقاً لتشكيلة محددة من الاحتمالات التي يمكن استخدامها فلاعب الصفوف سوف يمنح كل صف من حقية جزءاً من الوقت وكذلك سيفعل لاعب الاعمدة فلو اخذنا المثال التالي:

(مثال4) اوجد الاستراتيجية المثلى لكل من اللاعبين A,B وقيمة المباراة طبقاً لمصفوفة الدفع التالية؟

(Example 4) Find strategies For player is (A,B) and the value of (V) for the pay off matrixe

	اللاعبB			Row Min
اللاعب A		Q_1	Q_2	
	P_1	6	18	6
	P_2	15	12	12
	Column Max	15	18	

Max Min=12

Min Max=15

$$12 \leq \boldsymbol{V} \leq \mathbf{15}$$

يلاحظ ان قاعدة اعلى اقل (*Max Min*) تساوي (12) لا تساوي اقل الاعلى (*Min Max*) والتي تساوي (*1*) وفي هذه الحالة فان كلا اللاعبين سوف يلتجؤن إلى استخدام مزيج من الاستراتيجيات

فالمتنافس A سوف يلعب على صف من حقية جزء من الوقت وكذلك المتنافس B سوف يلعب كل عمود من عمودية جزء من الوقت فلو فرضنا:

P= نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A للعب الصف الاول (ستراتيجية رقم (1)).

$1-P$= نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A للعب الصف الثاني (الاستراتيجية رقم(2)).

Q_1= نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب B للعب في العمود الاول (ستراتيجية رقم (1)).

Q_2= نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب B للعب العمود الثاني (ستراتيجية رقم2).

A اللاعب Bاللاعب

		Bاللاعب	
		Q_1	Q_2
A اللاعب	P_1	6	18
	P_2	15	12

$P_1+P_2=1$

$Q_1+Q_2=1$

بافتراض ان اللاعب A عقلاني ذكي منطقي فهو في هذه الحالة سوف يرغب في تقسيم وقته للصفوف (ستراتيجية) الاولى والثانية بحيث تكون ملكية المتوقعة من لقب صف الثاني (الاستراتيجية الثانية) بغض النظر كما سيلعبه اللاعب (B)

$$6P_1+15(1-P_1)=18P+12(1-P_1)$$
$$6P_1+15-15P_1=18P_1+12-12P_1$$
$$-9P_1+15=6P_1+12$$
$$3=15P_1 \Rightarrow P_1=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

كذلك

$$P_2=1-P_1=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

كذلك اللاعب A سوف يلعب الصف الاول بوقت $\frac{1}{5}$ في حين يلعب الصف الثاني بوقت $\frac{4}{5}$.

أما بالنسبة للاعب (B) بنفس منطق (A) فانه سيقوم بتقسيم وقته (للاعمدة) (ستراتيجية الاولى والثانية) بحيث تكون خسارته المتوقعة من لعب عمودة الاول (ستراتيجية الاولى) تساوي خسارته المتوقعة من لعب عمودة الثاني وبالتالي سيكون كما يلي:

$6Q_1+18(1- Q_1)=15 Q_1+12(1- Q_1)$

$6 Q_1+18-18 Q_1=15 Q_1+12-12 Q_1$

$-12 Q_1+18=3 Q_1+12$

$6=15 Q_1$

$Q_1= \frac{6}{15} =2/5$

كذلك

$Q_2=1-Q_1=1-2/5=(\frac{3}{5})$

أي ان الراغب B سوف يلعب العمود الاول بوقت $(\frac{2}{5})$ في حين يلعب العمود الثاني بوقت $(\frac{3}{5})$ من الوقت وعملية تقسيم الوقت للاعب والصفوف أو الاعمدة يجب ان تتم بدون نمط معين أي عشوائياً.

لايجاد قيمة المباراة للمثال السابق سيكون كما يلي :

		اللاعبB		prob
اللاعب A		Q_1	Q_2	
	P_1	6	18	1/5
	P_2	15	12	4/5
	prob	2/5	3/5	

انما اجمالي الكسب المتوقع للاعب A وهي قيمة المباراة

$V1=\frac{4}{5}\left[6*\frac{1}{5}+\left(15*\frac{4}{5}\right)\right]+\frac{3}{5}\left[\left(18*\frac{1}{5}\right)+\left(12*\frac{4}{5}\right)\right]$

$V1=\frac{2}{9}\left[\frac{66}{9}\right]+\frac{3}{5}\left[\frac{66}{5}\right]=\frac{330}{25}=13.2$

$\therefore V1=13.2$

أي ان اللاعب A إذا لعب ستراتيجياته بدون نمط معين فانه يتوقع ان يكسب بالمتوسط العائد بمقدار 13.2 في كل مرة يلعب فيها المباراة وبالتالي ستكون الخسارة المتوقعة للاعب (B)

$V3= \frac{1}{5}\left[6+\frac{2}{5}\right]+\left(18*\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}\left[15*\frac{2}{5}\right]+\left(12*\frac{3}{5}\right)$

$V3=\frac{1}{5}\left[\frac{66}{5}\right]+\frac{4}{5}\left[\frac{66}{5}\right]=\frac{330}{25}=13.2$

ولما كانت قيمة المباراة موجبة فان اللاعب A هو الذي يكسب المباراة ويكون كسبه بالمتوسط (13.2) في كل مرة يلعب فيها المباراة في حين خسارة اللاعب (B) بالمتوسط (13.2) في كل مرة يلعب فيها المباراة.

2-5-7 الطريقة الحسابية Arithmetic Method

وهناك طريقة اخرى لإيجاد نسبة الوقت الذي يقضيه كل من اللاعبين وهو الطريقة الحسابية (Arithmetical Method) وذلك عبر النقاط التالية على المثال السابق:

1- نقوم بطرح العائد الاصغر من العائد الاكبر لكل عمود ولكل صف.

2- تبادل القيم الناتجة عن عملية الطرح يبين الصفين ويبين العمودين.

3 - ايجاد نسبة الوقت للصفوف والاعمدة.

		اللاعبB		
		Q_1	Q_2	
اللاعب A	P1	6	18	12
	P2	15	12	3
		9	6	

عملية التبادل

		اللاعبB		
		Q_1	Q_2	
اللاعب A	P_1	6	18	3
	P_2	15	12	12
		6	9	15

Prob. 6/15 9/15

7-5-3 طريقة الاحتمالات المشتركة Joint Probabilities Method

يتم استخدام طريقة الاحتمالات بعد ان يحدد كل لاعب الوقت الذي يستغرقه في لعب كل من ستراتيجياته المتاحة بطريقة التي تم تناولها فلو عدنا للمثال السابق.

ان اللاعب A سوف يلعب ستراتيجية الاولى باحتمال $(\frac{1}{5})$ والثانية بمقدار$(\frac{4}{5})$ بينما اللاعب (B) سوف يلعب ستراتيجية باحتمال $(\frac{2}{5})$ والثانية $(\frac{3}{5})$ وكل من اللاعبين يلعبان بصورة مستقلة عن الاخرى

B

	Q1	Q2	
P1	6	18	1/5
P2	15	12	4/5
	2/5	3/5	

A

الاستراتيجية	العائد	الاحتمال	القيمة الاحتمالية للعائد
الصف الاول عمود الاول	6	$(\frac{2}{5}*\frac{1}{5})$	$\frac{12}{25}=\frac{2}{25}*6$
الصف الاول عمود الثاني	18	$(\frac{3}{5}*\frac{1}{5})$	$\frac{54}{25}=\frac{3}{25}*18$
الصف الثاني عمود الاول	15	$(\frac{2}{5}*\frac{4}{5})$	$\frac{120}{25}=\frac{8}{25}*15$
الصف الثاني عمود الثاني	12	$(\frac{3}{5}*\frac{4}{5})$	$\frac{144}{25}=\frac{12}{25}*12$

إذا قيمة المباراة V تساوي

$$\frac{12}{25}+\frac{54}{25}+\frac{120}{25}+\frac{144}{25}=\frac{330}{25}=13.2$$

وهي نفس القيمة التي توصلنا اليها بالطرائق السابقة.

7-6- المباراة ذات الابعاد(M*2) or (2*M)

Game win dimensions (M*2) or (2*M)

* المباراة من نوع (M*2) او (2*M)

وهي الحالة التي يكون فيها لاحد اللاعبين اكثر من ستراتيجيتين واللاعب الاخر ستراتيجيتين (M>2) وعندما لا تكون هناك نقطة توازن فان الطرق السابقة لا تصلح حل مثل هذا النوع من المباراة لذلك يتطلب استخدام احدى الطرق التالية:-

- طريقة السيطرة.
- طريقة المباراة الفرعية.
- طريقة المعادلات الخطية.
- الطريقة البيانية.
- البرمجة الخطية.

7-6-1- طريقة السيطرة (Dominance Method)

في حالة كون المباراة من نوع (M*2) or (2*M) وعندما تكون (M>2) وعدم وجود نقطة توازن وكانت هناك امكانية لاختزال هذه المباراة إلى مباراة من نوع (2*2) وذلك عن طريق اسقاط الاستراتيجية التي تعطي اللاعب الاخير الفرصة الوحيدة للكسب وبالتالي حلها بالطرق السابقة.

فلو اخذنا المثال التالي والذي تمثله المصفوفة التالية:

مثال رقم 5 اوجد الاستراتيجية المثلى لكل من (A.B) وقيمة المباراة لمصفوفة الدفع باستخدام طريقة السيطرة

(Example .5) find strategies for ply's (A,B) and the value of(v) for the pay off matrix by using (dominance method)

		اللاعبB	
		Q_1	Q_2
اللاعب A	P_1	-25	-15
	P_2	18	10
	P_3	8	20

نلاحظ من مصفوفة العائد اعلاه ان على اللاعب A ان لا يلعب الاستراتيجية الاولى لانه سوف يعطي خصمه اللاعب (B) الفرصة الوحيدة للكسب. لذلك فان اللاعب A سوف يسقط عن حسابه الصف الاول

وبالتالي يكون اللاعب (A) قد سيطر على الاستراتيجية الاولى وبغض النظر عن ردود فعل اللاعب (B) وبذلك تكون مصفوفة العائد كما يلي:

		اللاعبB	
		Q1	Q2
اللاعب A	P_1	18	10
	P_2	8	20

ولعدم وجود نقطة توازن لذلك سيتم حلها بإحدى الطريقتين (المزيج من الاستراتيجيات) أو (طريقة الاحتمالات المشتركة).

7-6-2- طريقة المباراة الفرعية Sub game Method

تستخدم هذه الطريقة من نوع (M*2) أو (2*M) وذلك لعدم امكانية اختزالها إلى مباراة من نوع (2*2) وبالتالي يصعب حلها بإحدى الطرق السابقة بالإضافة إلى عدم وجود نقطة توازن ففي هذه الحالة يتم اللجوء إلى المباراة الفرعية ومن ثم اختيار الافضل من بينها وعملية المفاضلة تكون للاعب الذي يكتلك اكثر من استراتيجيتين فلو اخذنا المثال التالي:

(مثال6) حل المصفوفه المباراة باستخدام طريقة المباراة الفرعية

(EX6):-solue game matrix by using sub game methol

		اللاعبB				
		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
اللاعب A	1	15	7	-8	6	-20
	2	10	-25	-12	11	24

يتضح من المصفوفة اعلاه انه لايوجد نقطة توازن ولايمكن حلها باحدى الطرق السابقة بالتالي سيلجئ اللاعب B والذي يمتلك اكثر من ستراتيجيتين إلى طريقة السيطرة وذلك باسقاط الاستراتيجيات التي تحقق للاعب (A) الكسب على الدوام وهي الاستراتيجية الاولى والرابعة وتصبح المصفوفة كما يلي:

		B اللاعب		
		Q_1	Q_2	Q_3
A اللاعب	1	7	-8	-20
	2	-25	12	24

المباراة اعلاه لايوجد نقطة توازن ولايمكن اختزالها إلى عبارة من نوع (2*2) وبالتالي لايمكن حلها بالطرق السابقة لذا سوف نلجأ إلى تقسيم المباراة إلى مباراة فرعية من نوع (2*2) حيث يمكن تقسيمها إلى ثلاث مباراة فرعية وكما يلي:

1	
7	-8
-25	-12

2	
7	-20
-25	-24

3	
-8	-20
12	24

وبالتالي يتم حل كل تشكيلة من المباراة على خدة واختيار المباراة الفرعية التي تحقق للاعب B اعلى عوائد أي اعلى قيمة بالإشارة السالبة.

واذا كانت على سبيل المثال كل القيمة الموجبة فانه سيختار المباراة التي تحقق له اقل خسارة ممكنة.

7-6-3- طريقة المعادلات الخطية Linear Equations Method

(مثال7) حل مصفوفة المباراة باستخدام المعادلات الخطية

(Example7) Solve game Matrix by using linear Equation Method:

		B اللاعب		
		Q_1	Q_2	Q_3
A اللاعب	1	6	4	14
	2	10	10	6
	3	0	14	4

يتضح من المثال اعلاه انه لا توجد نقطة توازن ولايمكن حلها بالطرق السابقة لذلك يتطلب حلها بطريقة المعادلات الخطية

الربح المتوقع لـ A	استراتيجية B المباراة
$6\times_1+10X_2+0=V$	(1)
$4X_1+10X_2+14X_3=V$	(2)
$14X_1+6X_2+4X_3=V$	(3)

حيث ان (X_1, X_2, X_3) تساوي نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب (A) للعب استراتيجياته المختارة وذلك يكون

$$X_1+X_2+X_3=1$$

V= قيمة المباراة.

من المعادلات الثلاثة هناك اربعة مجاهيل لذلك يتطلب ان تتخلص من احد المجاهيل وليكن X_1 وبالتعويض عن (X_1) في المعادلات تحصل على

$X_1+X_2+X_3=1$

$X_1=1-X_2-X_3$

$6(1-X_1-X_2-X_3)+10X_2 =V……..(1)$

$4(1-X_1-X_2-X_3)+10X_2+14X_3 =V……..(2)$

$14(1-X_1-X_2-X_3)+6X_2+4X_3 =V……..(3)$

وبالتجزئة للمعادلات اعلاه تحصل على:

$6+4X_2-6X_3 =V……..(4)$

$4+6X_2+10X_3 =V……..(5)$

$14-8X_2-10X_3 = V……..(6)$

وسوف نقوم 2 ضمه V من المعادلات (6,5,4)

$V-4X_1+6X_3=6$ ……..(7)

$V-6X_2-10X_3=4$ ……..(8)

$V-18X_2+10X_3=14$ ……..(9)

والان يجب التخلص كما احد المحاصيل مرة اخرى نأخذ المعادلة رقم (8,9)

$V- 6X2- 10X_3= 4$
$V+ 8X2+ 10X_3= 14$ } بالجمع

$2V+ 2X2 = 18$ ……..(10)

يجب ان تكون لدينا ثلاث معادلات جديدة مشتقة من المعادلات (5,4,6,7)

$V-4X2+6X_3=6$ *5
$V-6X2-10X_3=4$ *3

$5V-20X2+30X_3=30$
$3V-18X2-30X_3=12$ } بالجمع

$8V- 38X2 = 42$ ……..(11)

$V-4X_2+6X_3=6$ *5
$V-8X_2+10X_3=14$ *3

$5V-20X_2+30X_3=30$
$-3V-24X_2-30X_3=24$

$2V - 44 =-12$ ……..(12)

باستخدام المعادلة (10) و (11)

$2V+2X_2=18$ *4

$8V-38X_2=42$

$8V+8X_2=72$
$8V-38X_2=42$ } بالطرح

$46X_2=30$

∴ نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A في الاستراتيجية الثانية

$X_2=\frac{30}{46}=\frac{15}{23}$

وبالتعويض عن قيمة X_2 في المعادلة 10

$2V+2X_2=18$

$2V+2(\frac{15}{25})=18$

(يضرب طرفي المعادلة * 23)

$46V+30=414$

$46V=414-30$

$V=384/46=192/23=8.347$ قيمة المباراة

وبالتعويض عن قيمة (X2) وقيمة (V) في المعادلة (1)

$V-4X2+6X2=6$

$\frac{192}{23}-4(\frac{15}{23})+6X3=6$ *23

$192-60+138X3=138$

$138X3=6$

∴ نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A في الاستراتيجية الثالثة

$X3=\frac{6}{138}=\frac{1}{23}$

وبما ان

$X_1+X_2+X_3=1$

اذان

$X1=1-X2-X3$

$X1=1-\frac{15}{23}-\frac{1}{23}=7/23$

نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب A للعب في الاستراتيجية الاولى.

وبنفس الطريقة عندما يلعب اللاعب A استراتيجية الخسارة

استراتيجية A	الربح المتوقع لـ B
1	$6y_1+4y_2+14y_3=v$
2	10y1+10y2+6y3=v
3	14y2+4y3=v

وكما هو معلوم $y_1+y_2+y_2=1$ نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب B يلعب في استراتيجياته المختارة وبنفس الطريقة يمكن الحصول

$$Y_2 = \frac{22}{46}$$

$$Y_3 = \frac{5}{46}$$

$$Y_1 = \frac{19}{46}$$

$$V = \frac{192}{23} = 8.347$$

(وهي لصالح اللاعب A)

7-6-4- الطريقة البيانية Graphical Method

تطبق الطريقة البيانية على المباراة التي تمتلك فيها على الاقل سياستين وعلى المباراة التي تكون غير مشفرة

مثال(8) حل المباراة الثانية باستخدام الطريقة البيانية

(Ex8) Solve game value by using graphical Method.

لاعب B

لاعب A	Q_1	Q_2
P_1	2	4
P_2	-1	3
P_3	1	2
P_4	-8	6

الحل:- نبدأ اولاً بالتحليل بالنسبة للاعب B والذي يحاول اختيار الاستراتيجية المثلى الذي يقلل اكبر خسارة متوقعة بالنسبة له. أي يحاول الحصول على نقطة (Min Max).

نفرض B يطبق الاستراتيجية الاولى Q1 والثانية Q2 حيث

$Q_1+Q_2=1$

E(A=1)= 2Q1+4

E(B/A=2)=-Q1+3

E(B/A=3)=Q1+2

E(B/A=4)=-8Q1+6

كما ذكرنا سابقاً طبق (Min Max) فان اللاعب B يحاول ان تكون الخسارة المتوقعة اقل أما مساوية إلى قيمة المباراة أي ان:

$2Q_1+4\leq V$

$-Q_1+3\leq V$

$-Q+2\leq V$

$-8Q_1+6\leq V$

نرسم التباينات الاربعة كدالة Q1 ونحدد قيمة Q2 المثلى من الرسم.

المتباينة الاولى $V=4+2Q_1$- ثم نحدد النقاط المتباينة

P1(0,4), P2(1,2)

المتباينة الثانية $V=3+Q_1$– ثم نحدد النقاط المتباينة

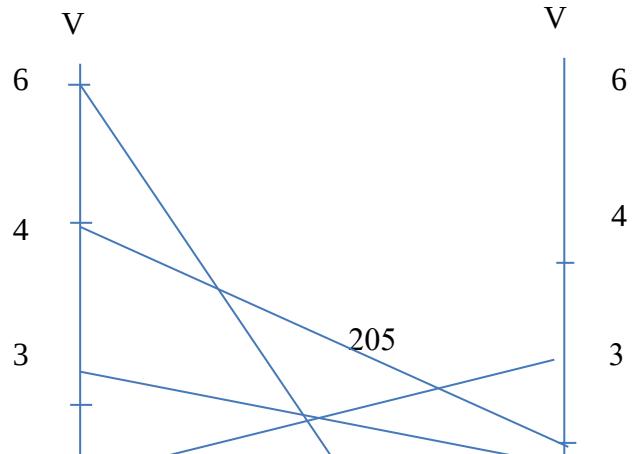
P1(0,3), P2(1,2)

المتباينة الثالثة $V=2+Q_1$

P1(0,2), P2(1,3)

المتباينة الرابعة $6=6+8Q_1$-

P1(0,6), P2(1,-2)



$$\frac{1}{3} \leq V\ I\ \leq \frac{2}{3}$$

المنطقة المظللة في الرسم تمثل منطقة الحل المقبول اوطا نقطة فيها تحدد نقطة Min Max بالنسبة للاعب B من الرسم نجد ان احداثيات هذه النقطة هي$(\frac{2}{3},\frac{8}{3})$ أي ان قيمة y_1 المثلى تساوي $\frac{2}{3}$ والقيمة المتوقعة لخسارته $V=\frac{8}{3}$ وعليه قيمة $y_2=\frac{1}{3}$ أي ان اللاعب B يطبق السياسة الاولى $\frac{2}{3}$ من وقت المباراة والثانية $\frac{1}{3}$ من وقت المباراة.

7-6-5 استخدام البرمجة الخطية في حل مشاكل المباراة:

Linear Programming Application to Solve Game Problems

عندما تفشل جميع الطرق السابقة في التوصل الى الحل يتم اللجوء الى استخدام البرمجة الخطية (LP) لإيجاد قيمة المباراة وذلك للتشابه الكبير بين نموذج البرمجة الخطية Linear Programming Model ونموذج المباراة (Game Model) ذات المجموع الصفري. وهذا التشابه يمكن إجماله بالآتي:-

1- في نموذج المباراة (Game Model) هناك دالة هدف (Objective Function) كما في البرمجة الخطية (LP) فأحد طرفي الصراع يحاول تعظيم مكاسبه بينما الطرف الآخر يحاول تقليل خسائره.

2- في نموذج المباراة (Game Model) هناك قيود ومحددات كما هو حاصل في البرمجة الخطية (LP) فعندما يختار أحد اللاعبين أي من إستراتيجياته المختارة ستكون هناك قيمة يحصل عليها اللاعب تمثل الكسب أو الخسارة تبعاً لطبيعة المباراة.

3- كل القيم في نموذج المباراة إما موجبة أو مساوية للصفر كما هو الحال في البرمجة الخطية (LP) فإذا اختار احد اللاعبين إستراتيجية معينة فإن الوقت الذي سوف يقضيه اللاعب للعب إستراتيجيته يساوي إلى الواحد صحيح في حين سيكون الوقت الذي يقضيه اللاعب للعب إستراتيجيته الغير مختارة مساوي إلى الصفر.

4- كما هو الحال في البرمجة الخطية (LP) هناك علاقة أصل Primal وثنائية Dual في نموذج المباراة، فأحد طرفي اللاعبين يحاول تعظيم مكاسبه بينما الطرف الآخر يحاول تقليل خسائره.

فلو أخذنا المثال السابق لإيجاد قيمة المباراة باستخدام البرمجة الخطية(LP).

B Strategy / A Strategy	(1)	(2)	(3)
(1)	6	4	14
(2)	10	10	6
(3)	0	14	4

عندما يلعب A إستراتيجيته المختارة فإن اللاعب B سوف يسعى الى تقليل خسائره المتوقعة وبالتالي تقليل قيمة المباراة.

إستراتيجية A المختارة	الخسارة المتوقعة للاعب B
(1)	$6X_1 + 4X_2 + 14X_3 \leq V$
(2)	$10X_1 + 10X_2 + 6X_3 \leq V$
(3)	$14X_2 + 4X_3 \leq v$

ولما كان هدف كلا اللاعبين هو تقسيم الوقت بين الإستراتيجيات الثلاثة بحيث يؤدي ذلك إلى تعظيم الكسب أو تقليل الخسائر.

إذ $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ يمثل دالة الهدف، وبالقسمة على V لدالة الهدف وقيود المشكلة نحصل على الأتي:-

$$1/V = X_1 /V + X_2/V + X_3/V$$

$$6X_1/V + 4X_2/V + 14X_3/V = V/V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$10X_1/V + 10X_2/V + 6X_3/V = V/V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$14X_2/V + 4X_3/V = V/V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

وبافتراض أن $X/V = X$

وبالتعويض عن قيمة X بـ X/V في دالة الهدف وقيود المشكلة يكون الآتي :-

Objective Function $1/v = X_1 + X + X_3$

وقيود المشكلة (Constraints) كما هي أدناه:-

$$6X_1 + 4X_2 + 14X_3 \leq 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$10X_1 + 10X_2 + 6X_3 \leq 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$14X_2 + 4X_3 \leq 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ولما كان اللاعب B يهدف الى تقليل خسائره فإنه في هذه الحاله يحاول تعظيم قيمه V لأنه كلما زادت قيمة V معنى ذلك $1/V$ سوف تنخفض.

Max:

$$1/V = X_1 + X_2 + X_3$$

S .t

$$6X_1 + 4X_2 + \mathbf{14X_3} \leq 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$10X_1 + 10X_2 + 6X_3 \leq 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$14X_2 + 4X_3 \leq 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$X_1 . X_2 . X_3 \geq 0$$

وبالتالي يمكن حل المشكلة اعلاه بالطريقة المبسطة Simplex Method ومن ثم الحصول على قيمة المباراة والتي تساوي 8.347. كما في المثال السابق .

اسئلة وتمارين الفصل السابع

1. بين اي من المصفوفات الاتيه مستقره ام غير مستقره ؟

أ.

اللاعب B			
اللاعب A	1	13	11
	−9	5	−11
	0	−3	13

ج = (مستقره) .

ب.

اللاعب B					
اللاعب A	16	4	0	14	−2
	10	8	6	10	12
	2	6	4	8	14
	8	10	2	2	0

ج=(مستقره) .

2. المصفوفه الاتيه تمثل المنافسه بين شركتين B , A من شركات انتاج الموبايلات , لقد استخدمت الشركه A استراتيجيتين لترغيب الزبائن لشراء بضاعتها في حين استخدمت الشركه B ثلاث استراتيجيات لذلك وكما مثبته في مصفوفه العائد ادناه . حدد الاستراتيجيات المثلى التي تحقق هدف الشركتان المتنافستان (زياده ربح الشركه A وتقليل خسارة الشركه B) .

الشركة B			
الشركة A	275	−50	−75
	125	130	150

ج=(B (1,2) , V=127.27)

3. ارادت دولتين تجديد الاتفاق التجاري بينهما الطرف الاول يتبنى مزيج من الاستراتيجيات (رفع الاسعار , زياده المساعدات) والطرف الثاني يتبنى ستراتيجيات زياده الطلب ورفع التمويل بالاجل وكان جدول المدفوعات لهذه المباراة كالاتي المطلوب ايجاد قيمه المباراة .

اللاعب B		
اللاعب A	8	2
	−3	4

ج=(V=2.92)

4. حل المباريات الاتيه بالطريقه البيانيه

أ.

اللاعب B			
اللاعب A	1	3	11
	8	5	2

ج= ((2,3) , V=4.45)

ب.

اللاعب B		
اللاعب A	1	2
	3	5
	−3	4
	7	−6

ج= (A(2,4) , V=3.53)

5. حل المباراة الاتيه باستخدام طريقة البرمجه الخطيه

اللاعب B			
اللاعب A	0	−1	1
	1	1	−1
	1	−1	0

ج (A(1,3) B(2,3) V=3.53).

6. حل المباراة الاتيه بعد تقليصها مستخدما اسلوب الهيمنة

اللاعب B

اللاعب A	15	30	28
	43	22	52
	16	33	29
	25	10	26

ج (V=28.07).

الفصل الثامن

الشبكات The Net works

8-1-المقدمة **Introduction**

8-2- مراحل جدولة المشاريع

Levels of Tabulation the projects

8-3- قواعد بناء (رسم) شبكات الاعمال

Network Rules & Construction

8-4- تحليل شبكات الاعمال Network Analysis

8-4-1- طريقة المسار الحرج (CPM) Critical path method

8-4-2- طريقة مراجعة وتقييم المشروع (PERT)

Program Evaluation and Review Technique

8-4-3 احتمال الانجاز Probability of Occurrence

8-5 اعتبارات الكلفة في جدولة المشروع:

Cost Consideration In Project Scheduling

8-1- المقدمة Introduction

تتميز معظم المشاريع التي تقوم المنشأة تنفيذها بكبر الحجم والتعقيد, وقد قام المدراء بالعمليات المنطقية التالية: التخطيط والبرمجة والتنظيم والرقابة لمثل هذه المشاريع ولكن لم تستخدم اساليب التحليل الكمي وفي الاساليب القديمة هي مخطط (Gant chart) نسبة إلى المهندس الاميركي جانت, غير ان معظم الصناعات تحتاج إلى معرفة كيفية ادارة مشاريع كبيرة الحجم ومعقدة بفاعلية كبيرة.

لذلك فان التعقيد في المشاريع يضطرنا إلى استخدام اساليب تخطيطية اكثر كفاءة وفاعلية تهدف إلى تحقيق الكفاءة المثلى عند التنفيذ، ويعبر عن هذه الكفاءة من خلال امكانية تقليص الوقت المطلوب لانجاز المشروع الكلي ضمن شروط مقبولة اقتصادياً من خلال استخدام الموارد المتاحة. لقد تطورت جدولة المشاريع كثيراً بفضل الاسلوبين التحليلين وهما اسلوب المسار الحرج Critical Path Method (CPM) وأسلوب مراجعة وتقييم المشروع Program Evaluation and Review Technique (PERT), والتي تساعد المدراء في التخطيط والبرمجة والمتابعة والرقابة على المشاريع الكبيرة الحجم والمعقدة وقد تم تطويرهما لاحقاً وذلك للحاجة الماسة لطريقة افضل للإدارة.

في العام 1957 طورت طريقة المسار الحرج (CPM) من قبل كيلي (J.E.Kelly) من شركة ريمنجتون راند (Remington Rand) والعالم ووكر (M.R.Walker) من شركة ديو بونت (Du pont) وقد استخدمت طريقة المسار الحرج في الاصل لمساعدة بناء وصيانة المصانع الكيمياوية لشركة ديو بونت. وفي سنة 1958 قام سلاح البحرية الامريكية بتطوير اسلوب المراجعة وتقييم المشروع (PERT) للتخطيط والرقابة على برنامج صواريخ بولاريس. وسوف نستعرض في الفصل كيفية بناء شبكات الاعمال وتحليل المخطط الشبكي لتقرير الوقت اللازم لانهاء تنفيذ كل نشاط من انشطة المشروع بعد التعرف على طرق تحليل المخططات الشبكية.

8-2- مراحل جدولة المشاريع Levels of tabulations project

يمكن تقسيم مراحل جدولة المشروع إلى ثلاثة مراحل, هي التخطيط, الجدولة, الرقابة والسيطرة.

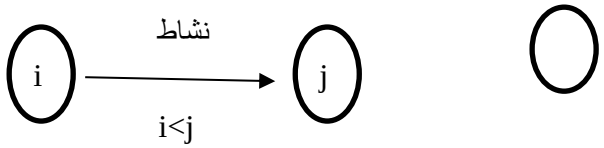
1. مرحلة التخطيط: وتشمل هذه المرحلة تحديد الانشطة التي يتكون منها المشروع والافتراضات التي يجب ان توضع على هذه الانشطة, وتحديد العلاقات الاعتيادية بين هذه الانشطة, كما وتشمل على تقدير الزمن اللازم لإنجاز كل نشاط من انشطة المشروع.
2. مرحلة الجدولة: وتشمل هذه المرحلة على تحديد وقت ابتداء وانتهاء كل نشاط وتحديد المسار الحرج الذي يحتوي على الانشطة التي تحتاج عناية خاصة لأنها تؤثر على زمن انتهاء المشروع ككل, كذلك تحديد الزمن المرن للانشطة الغير حرجة والتي تقع خارج المسار الحرج.
3. مرحلة الرقابة والسيطرة:- تتبع هذه المرحلة مرحلتي التخطيط والجدولة, وتتضمن اعداد تقرير دوري عن تقدم تنفيذ المشروع ويشتمل هذا التقرير على ملخص عن

التقدم الذي أُحرز خلال هذه الفترة, وتحليل الحالات التي تجابه المشروع والقرارات الادارية المطلوب اتخاذها حول المصادر والمواقع وغير ذلك.

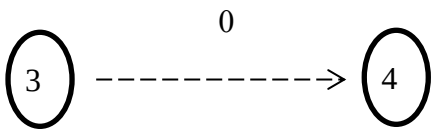
وهنا سيتم تناول بعض التعاريف والمصطلحات المهمة في بناء الشبكات:-

A. النشاط Activity: ان كل مشروع يتكون من عدد من الانشطة وكل نشاط يستغرق وقتاً معيناً لإنجازه. ويمثل كل نشاط في المخطط الشبكي بسهم تمثل بدايته بداية النشاط ورأسه نهاية النشاط وان طول السهم واتجاهه ليس له علاقة بحجم النشاط.

B. الحدث Event: نقطة البداية ونقطة النهاية للنشاط تسمى الاحداث والحدث هو نقطة من الزمن ولا يحتاج إلى أي مصدر, وعادة الحدث يمثل بدائرة مرقمة



C. النشاط الوهمي Dummy Activity: هو نشاط يستخدم لتحديد اعتمادية نشاط معين على بقية الانشطة ولكنه لا يحتاج أي زمن أو مواد أو تكاليف أو غيرها. ويمثل عادة بسهم متقطع



D. المسار Path: هو سلسلة من الانشطة تربط حدث البداية بأي حدث آخر.

E. شبكات الاعمال Network: هو تمثيل بياني للربط المنطقي والتتابع للأسهم والعُقد التي تمثل الانشطة والاحداث في المشروع وقد تسمى شبكة الاعمال بالمخطط السهمي.

8-3- قواعد بناء (رسم) شبكات الاعمال

Network Rules & Construction

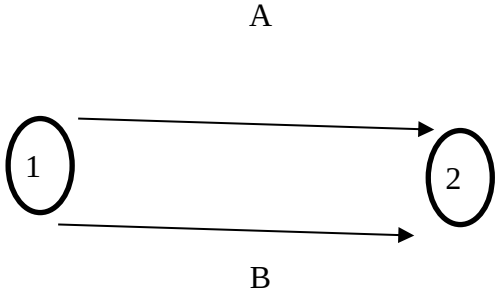
يجزء المشروع إلى مجموعة من الانشطة ثم يحدد حدثي البداية والنهاية, ثم بعد ذلك يتم تحديد ترتيب الانشطة التي تسبق الانشطة الاخرى بحيث توضع الانشطة بتتابع منطقي مع الآخذ بنظر الاعتبار ملاحظات رسم المخطط البياني. وبينما نحن نبني مخطط شبكة الاعمال ومن اجل التأكد من ان الأنشطة تقع في المسار التتابعي المنطقي فان الملاحظات الآتية يجب ان تبقى في الذاكرة:-

1. كل نشاط داخل الشبكة يمثل بسهم واحد فقط.
2. يجب عدم تكرار رقم الحدث من مرة واحدة في شبكة المشروع.
3. لشبكة المشروع نقطة بداية (حدث) واحد فقط, ولا يسبق البداية شيء.

كما ان للشبكة نقطة نهاية (حدث) واحد فقط, ولا يتبع النهاية شيء اخر.

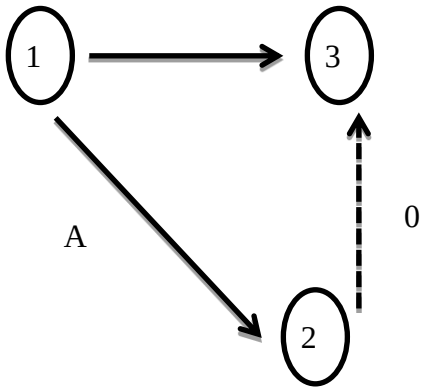
وقد يطلق على الأول نقطة المنبع والثاني نقطة المصب.

4. لا يجوز رسم نشاطين (سهمين) يبدأن بحدث واحد وينتهيان بحدث واحد أيضا, أي انه لا يجوز استخدام الحالة الآتية لأن ذلك يؤدي إلى تداخل في انشطة المشروع.

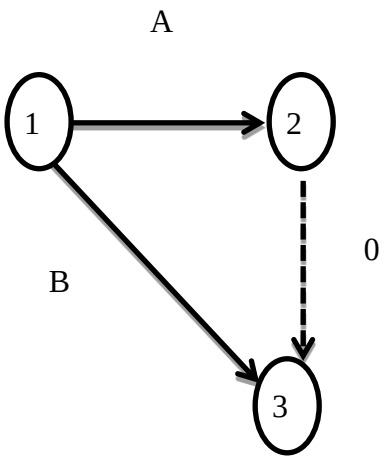


لمعالجة هذه الحالة نستخدم نشاط وهمي بزمن يساوي صفر وكما هو موضح في ادناه:

او



اما



5. بهدف التأكد من علاقات التتابع وصحتها في الشبكة, يجب الإجابة على الاسئلة الآتية عند إضافة أي نشاط جديد إلى الشبكة:

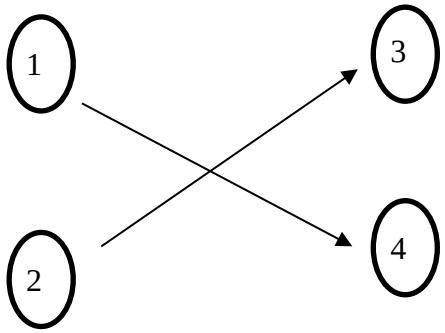
أ. ما هي الأنشطة التي يجب ان تتم قبل ان يبدأ هذا النشاط.

ب. ما هي الانشطة التي يبدأ مع هذا النشاط.

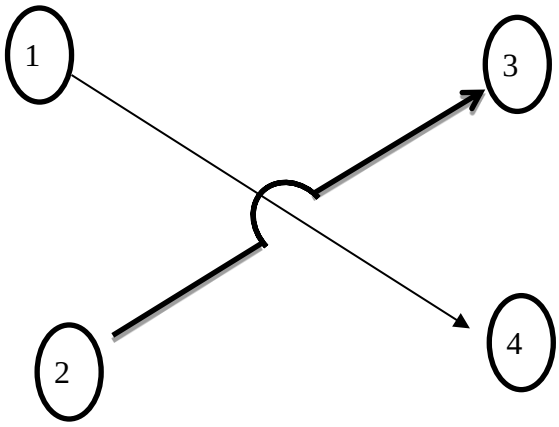
ت. ماهي الانشطة التي تأتي بعد هذا النشاط مباشرة.

6. عدم استخدام النشاط الوهمي الا في حالة الضرورة.

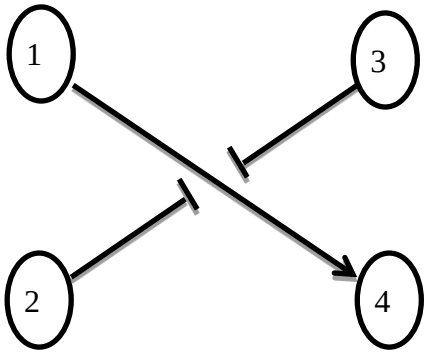
7. تجنب تقاطع الأسهم داخل الشبكة.



ويمكن معالجة ذلك أما باستخدام رسم الأنابيب



أذ استخدام رسم تقاطع الانشطة



ولغرض توضيح كيفية رسم شبكة الاعمال سنأخذ المثال الآتي:-

مثال1:- الانشطة الآتية تمثل انشطة مشروع معين والمطلوب رسم المخطط الشبكي لهذه الانشطة بالاشهر

Example.1 For any project having activities below. Build (construct) the Network for this project in months?

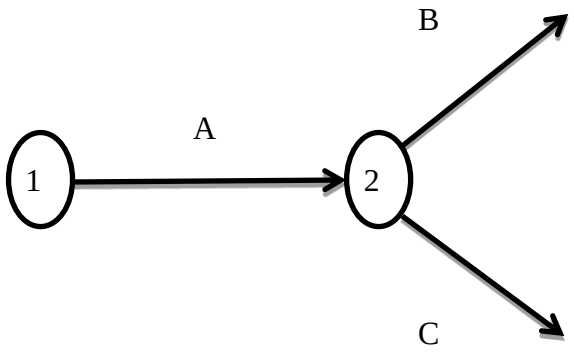
Activity **النشاط**	**Previous Activity** **النشاط السابق**	**Time (Month)** **الوقت (الشهر)**
A	…..	3

B	A	2
C	A	3
D	C	3
E	B,C	7
F	B,C	1
G	E,D	6
H	C	2
F,G,H	End of project	—

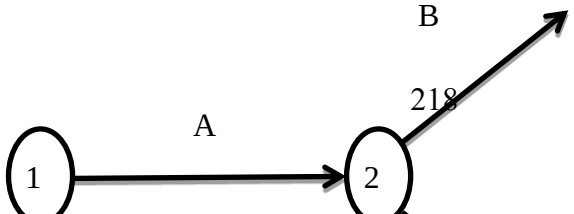
والآن يمكن رسم المخطط الشبكي وذلك بأخذ الانشطة واحد بعد الآخر, يتضح من الجدول اعلاه بأن النشاط A لا يسبقه أي نشاط, لذا فان حدث البداية يبدأ به نشاط واحد فقط هو A

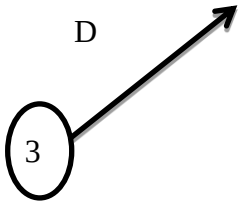
Activity

ثم نلاحظ ان النشاطين C,B يكونان بعد النشاط A أي ان النشاطين ينطلقان من الحدث الثاني وكما يلي: (2)

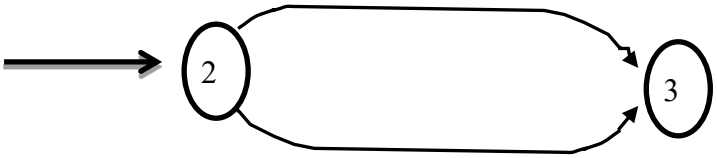


ثم نلاحظ ان النشاط D يبدأ بعد انتهاء النشاط C والذي ينتهي بالحدث وكما يلي: (3)

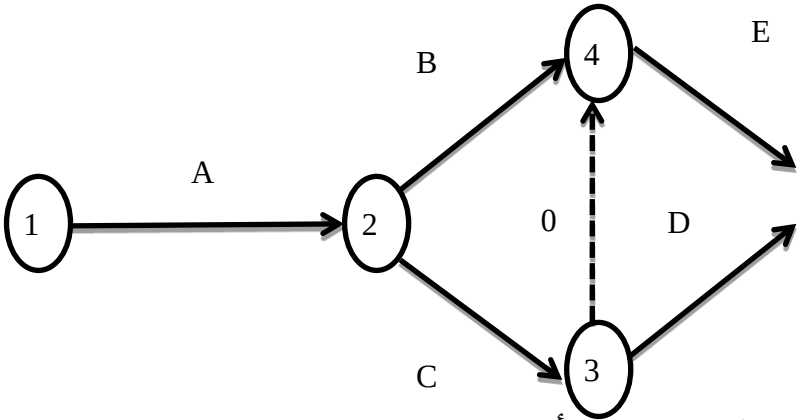




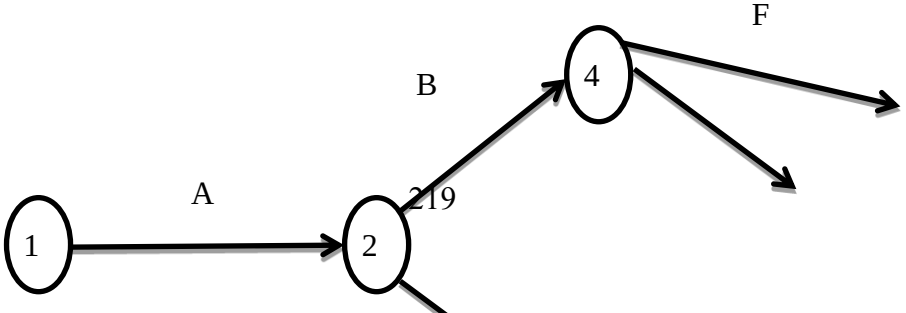
أن النشاط E يعتمد على النشاطين B,C أي لايمكن البدء به مالم ينتهي العمل بالنشاطين B,C أي ان هذين النشاطين يبدأن الحدث رقم 2 وينتهيان بالحدث رقم 3 ويكون الرسم بالشكل الاتي:-

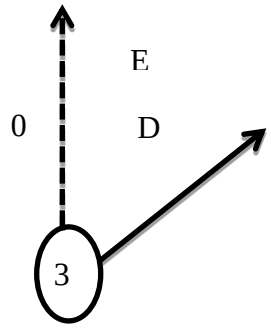


وهذا لايجوز حسب قواعد بناء الشبكات قاعدة رقم (4) من قواعد رسم المخطط الشبكي لذلك يجب ان تستخدم نشاط وهمي للتخلص من هذا التجاوز, وعليه يظهر المخطط الشبكي بشكله الصحيح وكما يلي:-

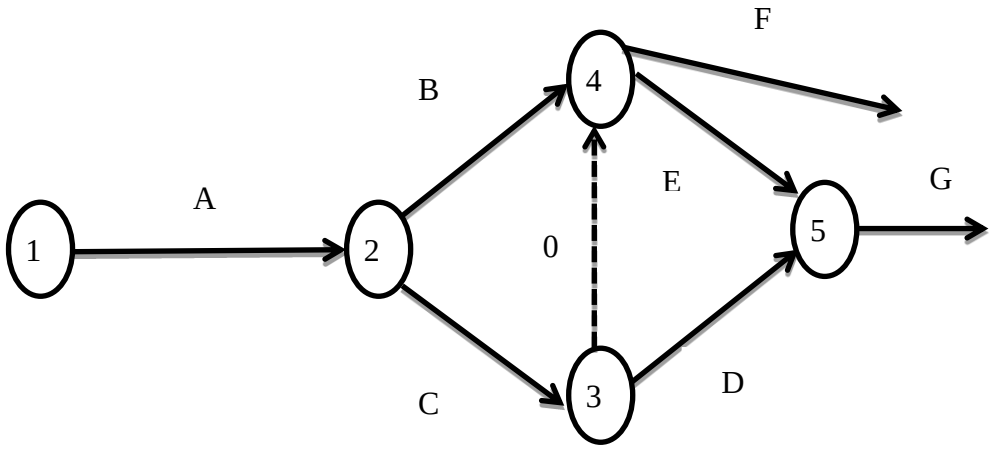


الآن وصلنا إلى النشاط F والذي يبدأ بعد انتهاء من النشاطين B,C وكما يلي:-

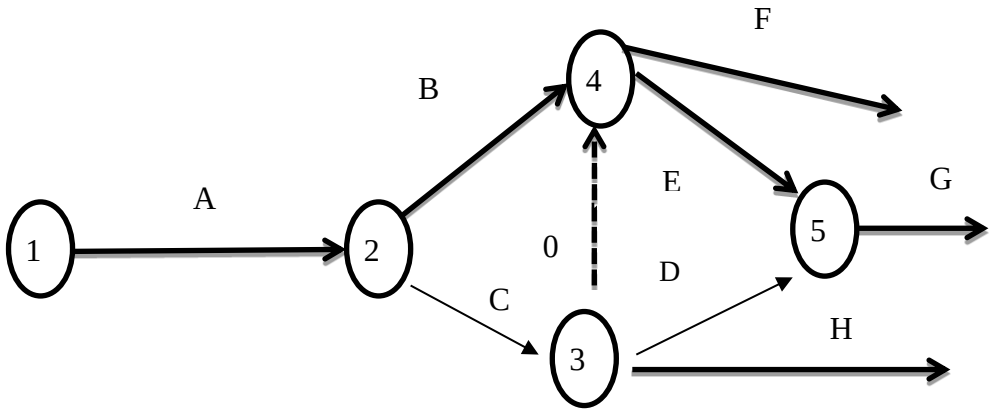




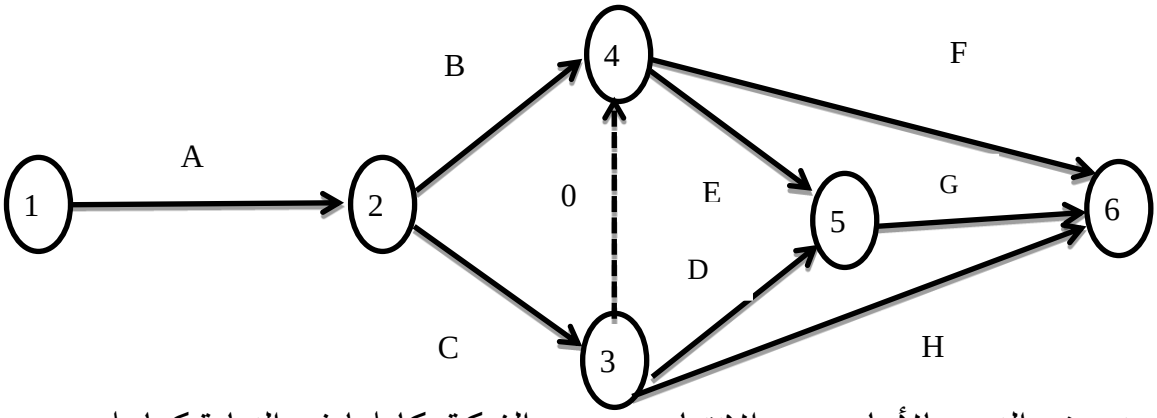
ونقوم برسم النشاط G الذي يعتمد على النشاطين D,E وكما اوضحه الرسم اعلاه فان الرسم الصحيح يصبح أي بعد الحدث رقم (5) وكما يلي:-



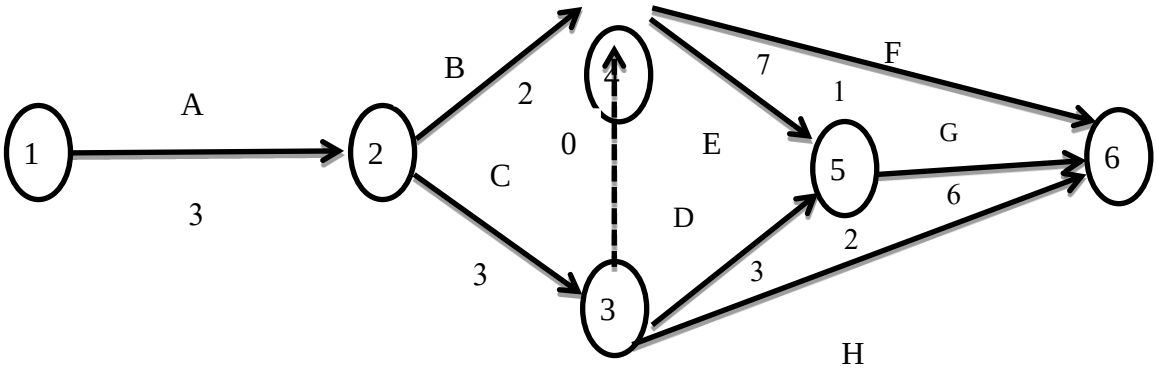
أما النشاط H فانه يبدأ بعد النشاط C أي بعد الحدث رقم (3) وكما يلي:-



ان النشاطات F,G,H تنتهي في نهاية المشروع في حدث النهاية للمشروع أي الحدث رقم 6 وكما يلي:-



ثم نضيف الزمن بالأسابيع بعد الانتهاء من رسم الشبكة بكاملها في النهاية كما يلي:-



مثال2) الانشطة الاتية تمثل انشطة مشروع بناء بيت سكني في احدى مناطق مدينة بغداد بالأسابيع, والمطلوب رسم المخطط الشبكي لبناء البيت؟

Example.2) Activities below represent activities of building a house in Baghdad in week construct the Network of Building that house?

Activity **النشاط**	**Previous Activity** **النشاط السابق**	**Time (Week)** **الزمن اسبوع**
رسم خرائط A	…..	6
مواد انشائية B	…..	2
حفر اساسات C	…..	4
بناء الهيكل D	A,B	4
حفر المجاري E	B	3
كهربائيات F	B	5
تأسيس الماء G	C,F	5
لبخ H	B	7

2	E,H	بياض I
3	D,I	رصف السطح والارضياتJ
10	J	اعمال النهايات K

يترك حل السؤال كواجب للطالب.

8-4- تحليل المخططات الشبكية Network Analysis

بعد ان تم بناء المخططات الشبكية بشكل منطقي وحسب المشكلة محل الدراسة نقوم بتحليل المخططات الشبكية والتي نقصد بها تقدير الوقت اللازم لإنهاء تنفيذ كل نشاط من انشطة المشروع وبالتالي حساب اقل وقت ممكن لإنهاء تنفيذ المشروع ككل واقل كلفة ممكنة له, بالإضافة إلى الاستخدام الافضل للموارد, وتوجد طريقتان لتحليل المخططات الشبكية هما:-

1- طريقة المسار الحرج (CPM) Critical Path Method

2- طريقة مراجعة وتقييم المشروع (PERT)

Program Evaluation and Review Technique

8-4-1- طريقة المسار الحرج (CPM)

اذ تعتمد طريقة المسار الحرج على اعطاء وقت محدد واحد لإنهاء تنفيذ كل نشاط من انشطة المشروع ويوضع الوقت فوق السهم الذي يمثل النشاط, ويتم تحديد الوقت من خلال خبرة الادارة أو من البيانات المتوفرة وتسمى طريقة المسار الحرج بالطريقة المحددة وذلك لأن كل نشاط من أنشطة المشروع له وقت محدد وثابت.

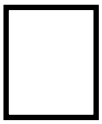
والمسار الحرج هو سلسلة من الانشطة الحرجة يربط بين حدثي البداية والنهاية في المخطط الشبكي, وبعبارة أخرى فان المسار الحرج يشخص جميع الانشطة الحرجة في الشبكة وهو يمثل اطول المسارات من بداية المخطط إلى نهايته.

ويسمى النشاط Activity بالنشاط الحرج Critical activity إذا كان التأخير في إنجاز هذا النشاط يؤدي إلى تأخير موعد إنجاز المشروع ككل.

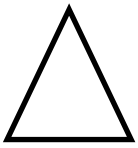
تحديد المسار الحرج:

ان طريقة تحديد المسار الحرج تعتمد على علاقة تربط بين زمنين هما:-

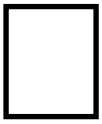
أ- وقت الابتداء المبكر Earliest start time (ES)



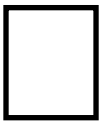
ب- وقت الإنجاز المتأخر Latest completion time (LC)



أ- وقت الابتداء المبكر للحدثj : (ES_j)

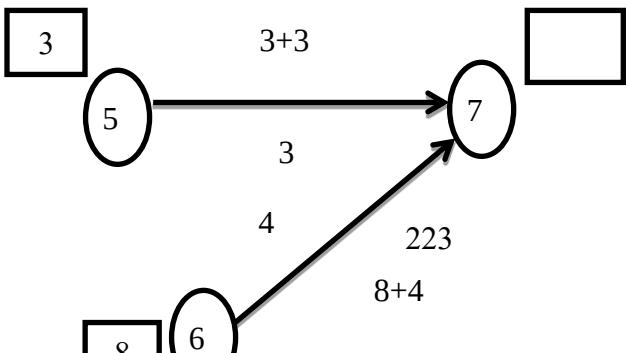


هو الوقت الذي يمكن ان يبدا عنده نشاط ما بصورة مبكرة والصيغة العامة لحساب وقت الابتداء المبكر للحدث j هي:-



$$ES_j=Max_i(ES_i+D_{ij})$$

حيث ان D_{ij} يمثل الوقت اللازم لتنفيذ النشاط (i-j) وعادة توضع هذه الارقام عند الحدث j داخل المربع ومن المعلوم $ES_1=0$ لأن بداية المشروع لا تستغرق أي زمن. والشكل ادناه يبين عملية حساب الوقت المبكر للحدث7.



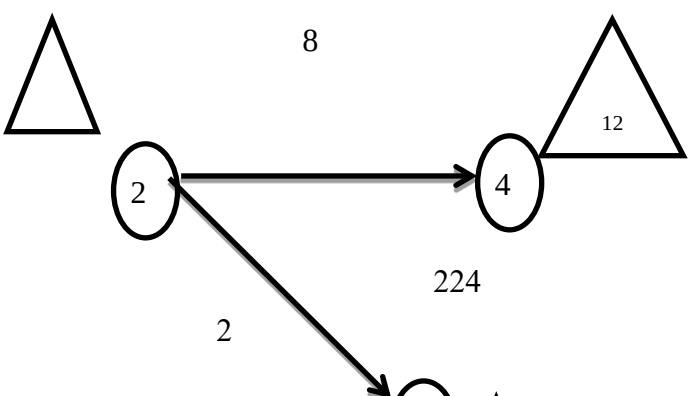
حيث ان الحدث 7 ينتهي فيه النشاطين(7−5), (7−6) وان زمن الابتداء المبكر للحدث 5 هو 3 وللحدث 6 هو 8, لذلك فأن:

$ES7=Max(3+3, 8+4)=Max(6,12)=12$

ب− وقت الانجاز المتأخر للحدث i : (LC_i) وهو آخر وقت يمكن أن ينتهي عنده نشاط ما دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير في وقت انجاز المشروع ويحسب لكل حدث وفق الصيغة التالية:

$LC_i=Min_j[LC_j-D_{ij}]$

وتبدا بعكس الاتجاه الذي أتبع لحساب وقت الابتداء المبكر لذلك الحدث, ولأجل الحصول على LC_i علينا ان نحصل LC_j لكل الاحداث النهائية للأنشطة (i-j) وعادة ما توضع هذه الارقام داخل عند الحدث i. فمثلاً عند احتساب وقت الانجاز المتأخر للحدث 2 كما في المخطط الشبكي ادناه:



$LC_2=Minj(12-8, 7-2)=Min(4,5)=4$

ان الحسابات العكسية تبدأ من حدث الانتهاء في المخطط الشبكي وتسير إلى حدث الابتداء 1. مع ملاحظة ان وقت الابتداء المبكر لحدث النهاية e يساوي دائما وقت الانجاز المتأخر لحدث النهاية أي:

$LC_e=ES_e$

ج- تحديد المسار الحرج CPM

ان طريقة تحديد المسار الحرج تمر بمرحلتين المرحلة الاولى الحسابات الامامية التي تحدد وقت الابتداء المبكر للنشاط, والمرحلة الثانية الحسابات العكسية وهي التي تحدد وقت الانجاز المتأخر.

أن النشاط (i-j) يقع على المسار الحرج إذا حقق الشروط الثلاثة التالية:

1- $ES_i=LC_i$

2- $ES_i=LC_j$

3- $ES_j-ESi=LCj-LCi=Dij$

وفي حالة عدم تحقيق أي من الشروط الثلاثة اعلاه فأن النشاط المعني لا يمثل مساراً حرجاً (شرط واحد).

مثال3) للمخطط الشبكي في المثال رقم (1) احسب:-

1- وقت الابتداء المبكر ES.

2- وقت الانجاز المتأخر LC.

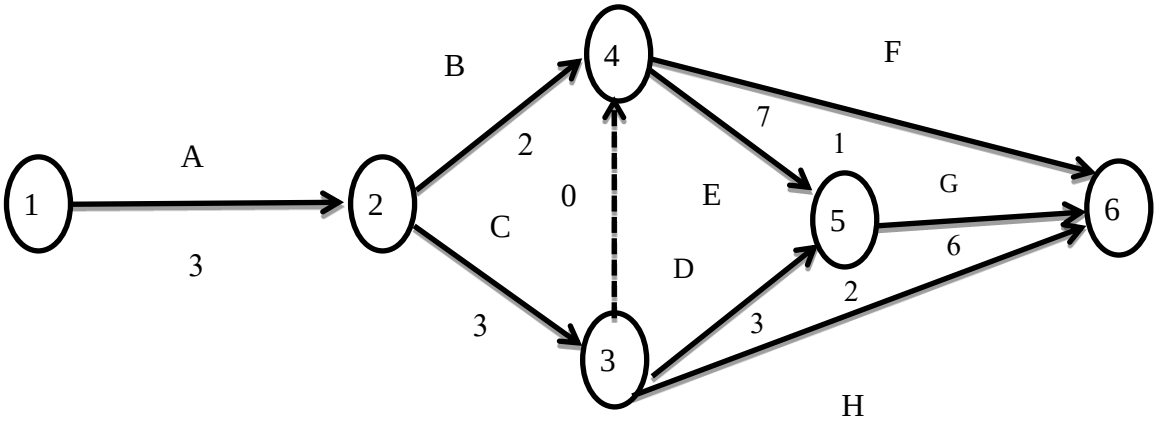
3- احسب المسار الحرج CPM بالاشهر.

Example.3) For the Network in Ex.1 compute:

1- Earliest start time ES . □?

2- Latest completion time LC. △?

3- The Critical Path CPM in months?



1. نحسب وقت الابتداء المبكر لكل حدث من الاصغر إلى الاعلى لذا فإننا نبدأ بالحدث الاول دائما.

$ES_1=0$

أما الحدث الثاني

$ES_2=Es_1+D_{12}=0+3=3$

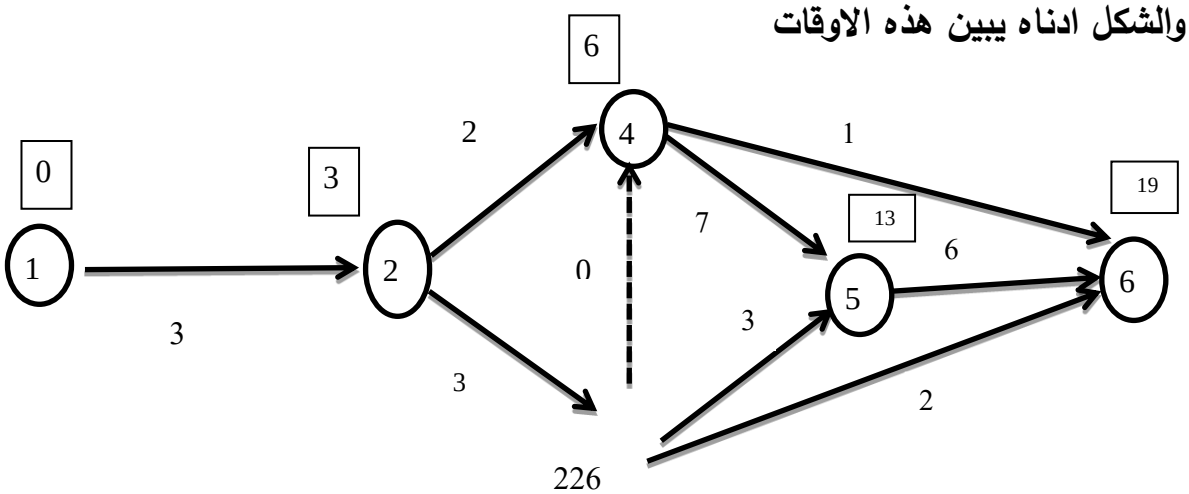
$ES_3=Es_2+D_{23}=3+3=6$

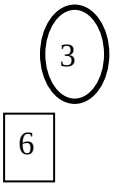
$ES_4=_{=2,3}(ES_i+D_{i4})=Max(3+2, 6+0)=Max(5,6)=6$

$ES_5=_{=3,4}(ES_i+D_5)=Max(6+3, 6+7)=Max(9, 13)=13$

$ES_6=_{=3,4,5}(ES_i+D_{i6})=Max(6+2, 6+1, 13+6)=(8,7,19)=19$

والشكل ادناه يبين هذه الاوقات





2. والآن نحسب وقت الانجاز المتأخر أي العملية العكسية:

$LC_6=ES_6=19$

$LC_5=LC6-D_{56}=19-6=13$

$LC_4=Min_{j=5,6}(LCj-D_{4j})=Min(13-7, 19-1)=6$

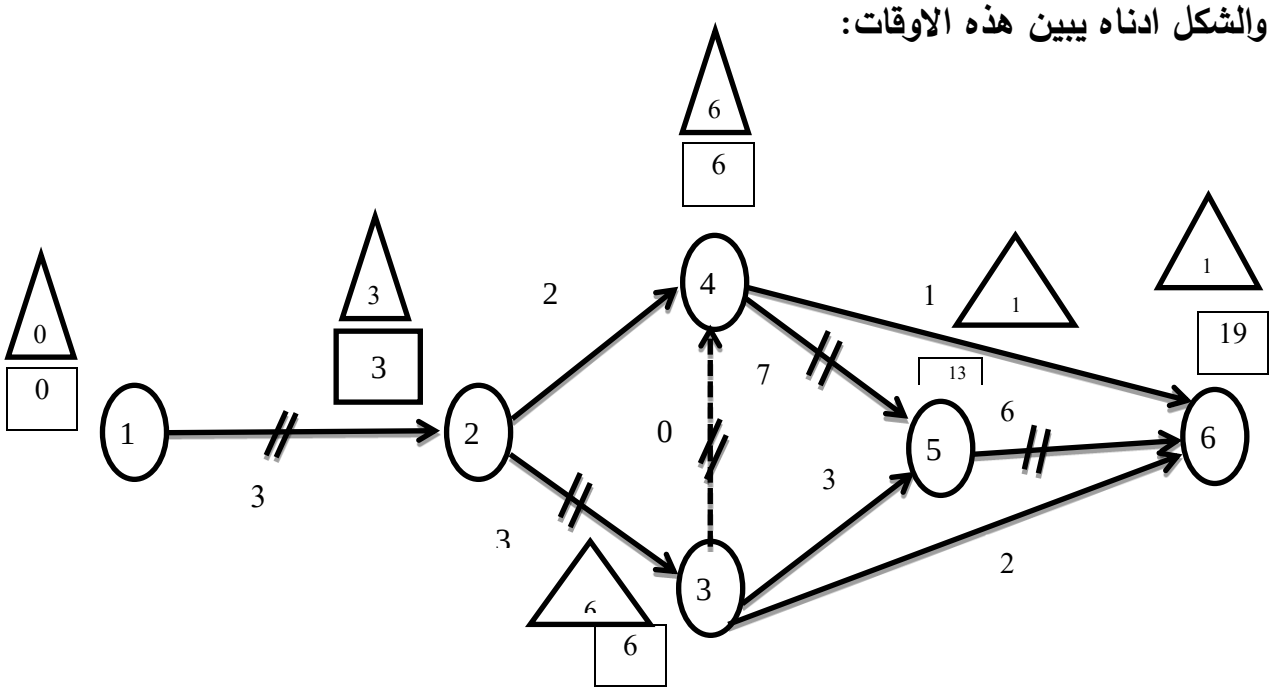
$LC_3=Min_{j=4,5,6}(LC_j-D3j)=Min(6-0, 13-3, 19-2)=6$

$LC_2=Min_{j=4,5}(LC_j-D_{3j})=Min(6-2, 6-3)=3$

$LC_1=LC_2-D_{12}=3-3=0$

وهنا يجب ان نلاحظ ان وقت الانجاز المتأخر لحدث البداية يساوي صفر أيضاً وفي حالة عدم مساواته للصفر مما يعني ان هنالك خطأ في الحسابات.

والشكل ادناه يبين هذه الاوقات:



ج- تحديد المسار الحرج CPM

الآن نقوم بتطبيق الشروط الثلاثة الوارد ذكرها سابقاً على جميع النشاطات (الاسهم) فمثلاً النشاط (2-1) الذي يربط الحدثين 2,1 تنطبق عليه جميع الشروط لذا فانه مسار حرج بينما

النشاط (4–2) أي النشاط الرابط بين الحدثين 2, 4 ينطبق عليه شرطان بينما لا ينطبق الشرط الثالث لذا فانه نشاط غير حرج, وهكذا بقية النشاطات فنحصل على المسار:

C.P=(1-2), (2-3), (3-4), (4-5), (5-6)

هو المسار الحرج لهذه الشبكة:

C.P=3+3+0+7+6

C.P=19 months

اذن فان الوقت المتوقع لإنجاز المشروع هو 19 شهراً.

بينما الانشطة (4-2), (5-3), (6-3), (6-4) فانها لا تشكل مسار حرج لانها بالرغم من تحقيقها للشرطين الاول والثاني الا أنها لا تحقق الشرط الثالث, أي انها نشاطات غير حرجة.

(مثال4) للمخطط الشبكي الذي تم الحصول عليه في المثال رقم 2 احسب الاتي:

1- وقت الابتداء المبكر ES. □

2- وقت الانجاز المتأخر LC. △

3- احسب المسار الحرج CPM.

Example.4) For the Network of Ex.2 find:

1- Earliest start time ES, □?

2- Latest completion time LC, △?

3- The critical path CPM in weeks ?

يترك للطالب حل هذا المثال رجاءاً.

.

8-4-2- طريقة مراجعة وتقييم المشروع PERT

Program Evaluation and Review Technique

بعد اعداد قائمة بالانشطة المكونة للمشروع نتساءل عن التقديرات الزمنية Time estimate اللازمة لتنفيذ كل نشاط اذ تنقسم العمليات المكونة للمشروع الى نوعين, النوع الاول يسمى

بالعمليات المتكررة وهي التي تحدث بتغيير بسيط او بدون تغيير أسبوع او شهر بعد شهر (او اية وحدة زمنية), مثال مراقبة الإنتاج في مصنع ينتج كمية ثابتة كل أسبوع او كل شهر مثلاً من منتج نمطي. في هذه الحالة تمتلك الإدارة الخبرة والبيانات الكافية التي تتضمن الكميات والتكاليف والوقت المتعلق بكل مرحلة من مراحل المشروع, وبهذا يصبح من الممكن استخدام طريقة المسار الحرج التي سبق شرحها لتحليل المشاريع واستخراج مدة التنفيذ في حالة توفر بيانات الوقت المتعلقة بكل مرحلة من المراحل.

اما النوع الثاني فيشمل العمليات غير المتكررة, أي لم تحدث من قبل بنفس الطريقة وتشمل هذه مشاريع الأبحاث والتطوير, حيث تنفذ معظم الانشطة فيها مرة واحدة, لذلك لا تتوفر معلومات سابقة يمكن الاعتماد عليها.

ولهذا نلجأ الى استخدام أسلوب PERT هذا الاسلوب يفترض لتنفيذ النشاط ثلاثة أزمنة اخذاً بنظر الاعتبار توقعات معينة, وهذه الأزمنة هي:

1. الزمن التفاؤلي Optimistic Time

وهو اقل وقت لازم لتنفيذ النشاط بافتراض ان كل شيء أثناء التنفيذ سيتم على احسن ما متوقع ووفق الخطة المرسومة ويرمز له a_{ij}.

2. الزمن التشاؤمي Pessimistic Time

وهو أطول وقت لازم لتنفيذ النشاط بافتراض ان التنفيذ ستعترضه كل العقبات المتوقع حدوثها في ظل الظروف غير الطبيعية مثل عطل المكائن, عجز في المواد المخزونة, تأخر استلام المواد الأولية وغيرها من الاسباب ويمز له بالرمز b_{ij}.

3. الزمن الأكثر احتمالاً Most likely Time

وهو اكثر الاوقات شيوعاً ويمثل تقديرات للفترة الزمنية اللازمة لتنفيذ النشاط في ظل الظروف الطبيعية مع الأخذ بالاعتبار جميع الاحتمالات المتوقعة أثناء التنفيذ ويرمز له بالرمز m_{ij}.

يتم تحديد الوقت الطبيعي Normal Time بعد تحديد الازمنة الثلاثة السابقة اللازمة لتنفيذ النشاط (i-j). والوقت الطبيعي لتنفيذ هذا النشاط هو متوسط الوقت بين الازمنة الثلاثة, (ويمز له بالرمز t_{ij}) وعلى وفق طريقة PERT فان قيمته التقريبية طبقاً لتوزيع بيتا Beta distribution.

$$t_{ij}=\frac{1}{3}[2m_{ij}+\frac{1}{2}(a_{ij}+b_{ij})]$$

$$t_{ij}=\frac{1}{3}[2m_{ij}+\frac{1}{2}(a_{ij}+b_{ij})]$$

او المعادلة

$$t_{ij}=\frac{aij+4mij+bij}{6}$$

وتباينه

$$V_{ij}=\left(\frac{bij-aij}{6}\right)^2$$

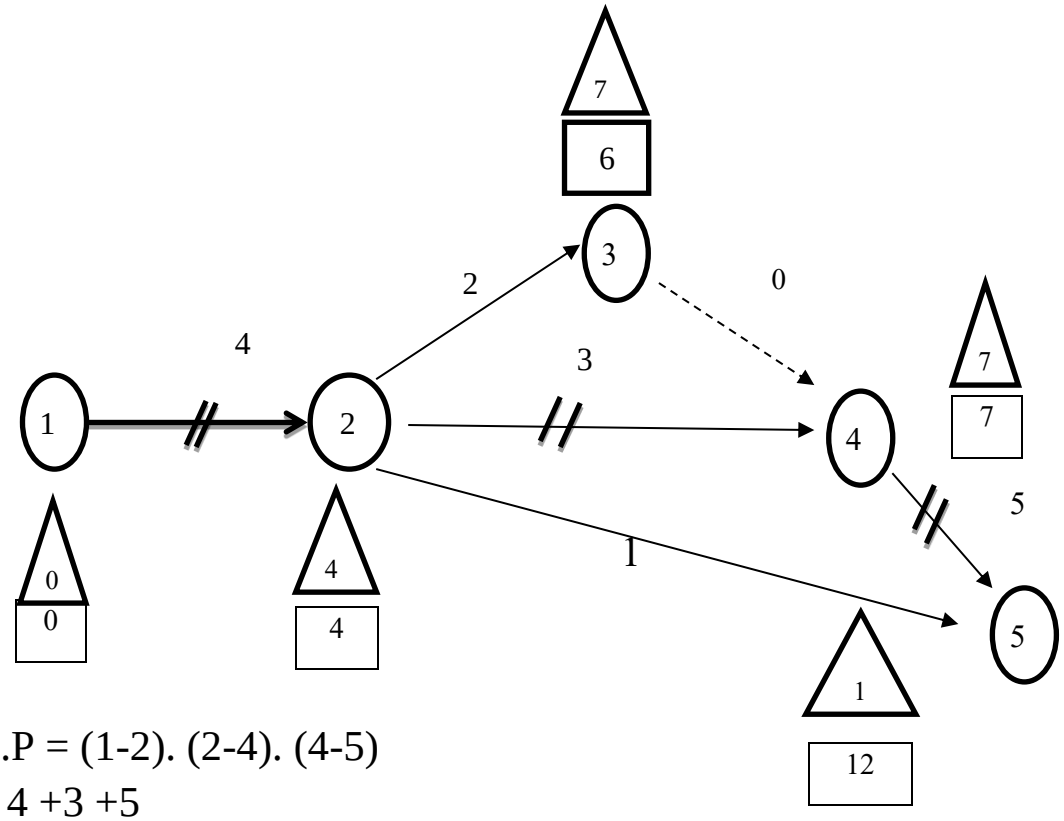
ان الوقت الطبيعي t_{ij} يقابل في الاسلوب السابق CPM الوقت المنفرد D_{ij}.

ولذلك فانه يمكن استخدام الوقت الطبيعي لحساب وقت الابتداء المبكر ووقت الإنجاز المتاخر ومن ثم تحديد الانشطة الحرجة وتحديد المسار الحرج كما في طريقة المسار الحرج, والمثال الآتي يوضح ذلك.

مثال (5):الجدول التالي يمثل أنشطة مشروع معين والأزمنة التقديرية اللازمة لتنفيذ كل نشاط. والمطلوب حساب الوقت الطبيعي ورسم المخطط الشبكي ثم تحديد المسار الحرج (الايام , الاسابيع)؟.

Example 5 :) The following table presents the activities of a particular project and the estimated times required for the implementation of each activity. And the normal time needed calculate and sketch network diagram and then determine the critical path(days, weeks)?.

Activity	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	t_{ij}
1-2	2	3	10	4
2-3	1	1	7	2
2-4	2	3	4	3
2-5	1	1	1	1
3-4	0	0	0	0
4-5	3	4	11	5



C.P = (1-2). (2-4). (4-5)
= 4 +3 +5
=12 days or Weeks

8-4-3 احتمال الانجاز Probability of occurrence

من الممكن حساب احتمال انجاز اي حدث في شبكة الاعمال. افترض ان u_i يمثل وقت الابتداء المبكر للحدث i، وبما ان مجموع الأوقات اللازمة لتنفيذ الانشطة لغاية الحدث i هو متغير عشوائي فان μ_i كذلك متغير عشوائي. وطبقاً لنظرية الحدود المركزية Central limit theory فانه يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $E(\mu_i)$ وتباين $Var(\mu_i)$ وبما ان μ_i يمثل وقت الإنجاز للنشاط السابق للحدث i، فانه يجب ان يقابل M_i زمن مجدول (مفترض) يرمز له ST_i وباحتمال:

$$\left\{ \qquad \right\}$$

$$P\left(M_i \leq ST_i\right) = P \quad \frac{\boldsymbol{M_i - E\,(M_i)}}{\sqrt{\boldsymbol{Var\,(M_i)}}} \leq \frac{\boldsymbol{STi - E\,(M_i)}}{\sqrt{\boldsymbol{Var\,(M_i)}}}$$

$$= P\left\{Z \leq K\right\}$$

اذ ان

$$K = \frac{\boldsymbol{STi - E\,(M_i)}}{\sqrt{\boldsymbol{Var\,(M_i)}}}$$

وعلى افتراض ان جميع الانشطة في الشبكة مستقلة إحصائياً عن بعضها فأننا نستطيع حساب الوسط الحسابي والتباين الى μ_i وكما يلي:

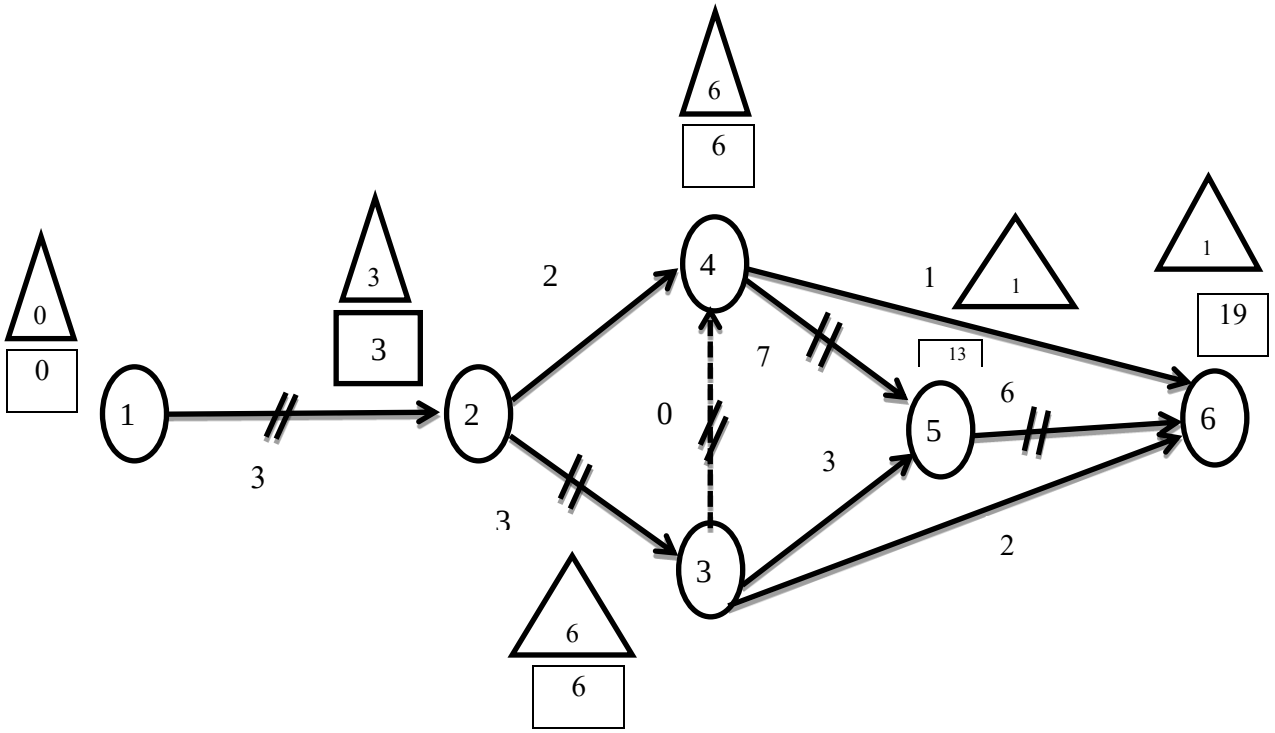
اذا كان هناك مسار واحد فقط يؤدي من حدث الابتداء الى الحدث i فان $E\,(\mu_i)$ يساوي مجموع الأوقات الطبيعية t_{ij} للأنشطة التي تكون هذا المسار، وان $Var\ (\mu_i)$ هو مجموع متباينات نفس الانشطة أما إذا كان هناك اكثر من مسار واحد فأننا نعتمد على المسار الذي يربط حدث الابتداء بالحدث i ويمتلك اكبر مجموع من الأوقات الطبيعية وثم حساب $E\,(\mu_i)$ $Var\ (\mu_i)$ للأنشطة المكونة لهذا المسار كما في الحالة السابقة. أما إذا تساوى مسارين أو اكثر في. مجموع الأوقات الطبيعية لهما فنأخذ المسار الذي يعطي أعلى تباين.

مثال (6): الجدول الآتي يبين الأوقات المقدرة للأنشطة المرافقة والتي تمثل إحدى شبكات الأعمال والمطلوب حساب احتمال إنجاز كل نشاط.

Example (6): The following table shows the estimated time for the activities associated withthat represent one of the business networks and the desired probability of completion of each activity expense.

Activity	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	t_{ij}	v_{ij}
1-2	2	2	8	3	1.00
2-3	1	1.5	11	3	2.78
2-4	5	1	3	2	1.36
3-4	0	0	0	0	0
3-5	1	2.5	7	3	1.00
3-6	1	2	3	2	0.11

4-5	6	7	8	7	0.11
4-6	3	4	11	5	1.78
5-6	4	6	8	6	0.44



الحدث	المسار	E (μ_i)	Var (μ_i)	ST_i	K_i	P ($Z \leq K_i$)
1	–	–	–	–	–	–
2	1−2	3	1.00	2	-1.00	0.159
3	1−2−3	6	3.78	5	-0.51	0.304
4	1-2-3-4	6	3.78	6	0.00	0.500
5	1-2-3-4-5	13	3.89	17	2.03	0.987
6	1-2-3-4-5-6	19	4.33	20	0.48	0.684

من الجدول اعلاه نلاحظ ان القيم المدرجة في العمود ST_i تم افتراضها بحيث تكون اصغر(2,5) او مساوية(6) او اكبر (17 , 20) من قيم E (μ_i) المقابلة لها، مما جعل

الاحتمالات المناظرة ضعيفة او متوسطة او قوية. اي ان احتمال إنجاز مجموعة النشاطات لغاية الحدث 3بزمن قدره 5 وحدات زمنية هو 0.304 لان هذا الزمن اقل من E (μ_3) وعلى العكس فان احتمال إنجاز النشاطات لغاية الحدث 5وبزمن قدره 17 وحدة زمنية هو 0.987 وذلك لان هذا الزمن اكبر من E (μ_5)

من الشكل السباق نلاحظ ان الوصول الى الحدث 4 يكون بمسارين، الاول هو (1–2–4) وان E (μ_3) = 5 وان المسار الثاني هو (1 – 2 – 3 –4) وان ذلك يساوي E (μ_3) =6 ولذلك تم اختيار المسار الثاني وكما هو مدون في الجدول. من الممكن استخدام وقت الإنجاز المتأخر LC_i بدلاً من ST_i وفي مثالنا أعلاه وبما ان جميع الحوادث تقع على المسار الحرج، فأن جميع الاحتمالات تكون مساوية الى 0.5 لان K =0

5–8 اعتبارات الكلفة في جدولة المشروع:

Cost Consideration In Project Scheduling

أن كل نشاط من أنشطة المشروع يتطلب وقتاً معين وكلفة معينة لإنجازه حيث توجد علاقة بين وقت تنفيذ النشاط والكلفة التي يتطلبها تنفيذ النشاط ومن الممكن تمثيل هذه العلاقة بخط مستقيم يربط بين نقطتين هما:

أ. النقطة الطبيعية Normal Point

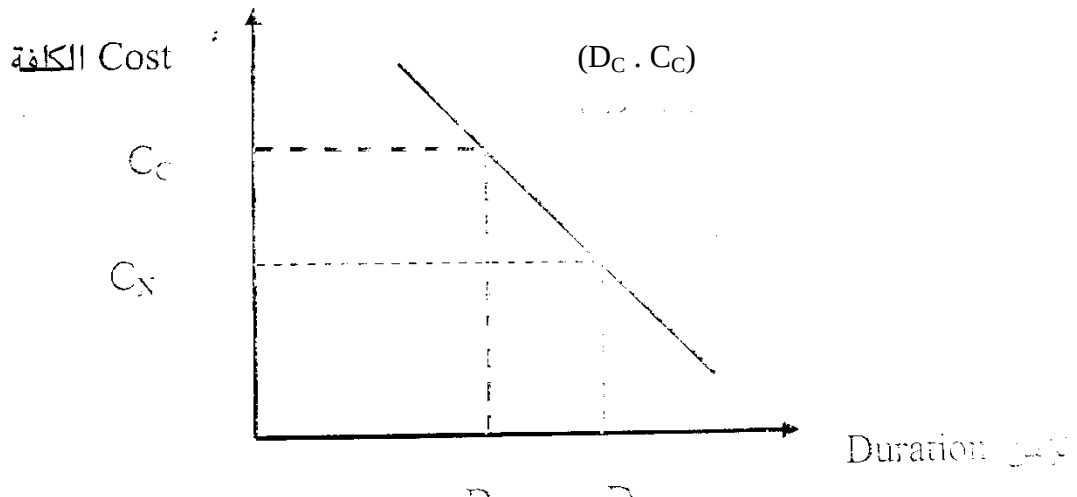
D_N الوقت الطبيعي Normal Duration

C_N الكلفة الطبيعية Normal Cost

ب. النقطة التعجيلية Crash Point

D_C الوقت التعجيلي Crash Duration

C_C كلفة التعجيل Crash Cost



الزمن

$(D_C \quad C_N)$

ومن الشكل اعلاه نجد أن الميل Slope يمكن حسابه حسب الصيغة الأتية:

$$\boldsymbol{Slope = \frac{\Delta\, Cost}{\Delta\, Duration} = (C_c - C_N)/(D_N - D_c)}$$

والميل يعني تخفيض فترة تنفيذ النشاط بوحدة زمن واحدة (يوم، أسبوع ، شهر ...).

خطوات تخفيض زمن المشروع:

1-نرسم المخطط الشبكي للمشروع.

2-نختار الوقت الطبيعي لتنفيذ كل نشاط.

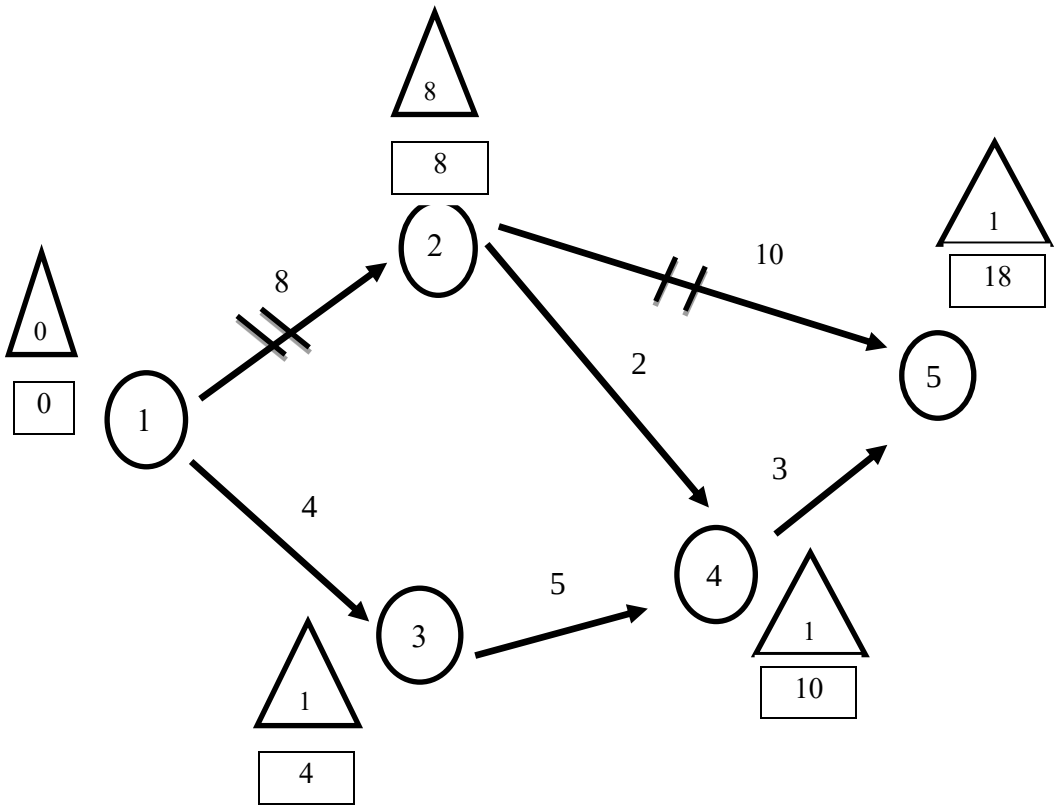
3-نحسب الكلفة الطبيعية للمشروع وهي مجموع الكلف الطبيعية لجميع الأنشطة في المشروع.

1. نجد ميل كل نشاط.
2. نحدد المسار الحرج.
3. نختار نشاط حرج واحد فقط ذو اقل ميل ونخفضه بوحدة زمنية واحدة ثم نضيف ميله على الكلفة الكلية السابقة.
4. نستمر بهذا الإجراء حتى تصل الأوقات الطبيعية للأنشطة الحرجة الى أوقاتها التعجيلية او يصبح التخفيض عديم الفائدة (يبقى الوقت ثابتاً بينما الكلفة تزداد).
5. إذا ظهر اكثر من مسار حرج للمخطط الشبكي يتم اختيار نشاط حرج واحد من كل مسار ذو اقل ميل ونخفضها بوحدة زمنية واحدة في آن واحد ثم نضيف ميلهما على الكلفه الكلية السابقة، او يمكن تخفيض نشاط مشترك بين المسارين اذا كان ميله اقل من مجموع ميلي النشاطين.

مثال(7) : وضح خطوات الإسراع في إنجاز المشروع الواردة بياناته في الجدول الآتي:

Example (7) : Explain steps to accelerate the completion of the project data contained in the following table:

Activity	Normal		Crash		Slope
	Time	Cost	Time	Cost	
1-2	8	100	6	200	50
1-3	4	150	2	350	100
2-4	2	50	1	90	40
2-5	10	100	5	400	60
3-4	5	100	1	200	25
4-5	3	80	1	100	10

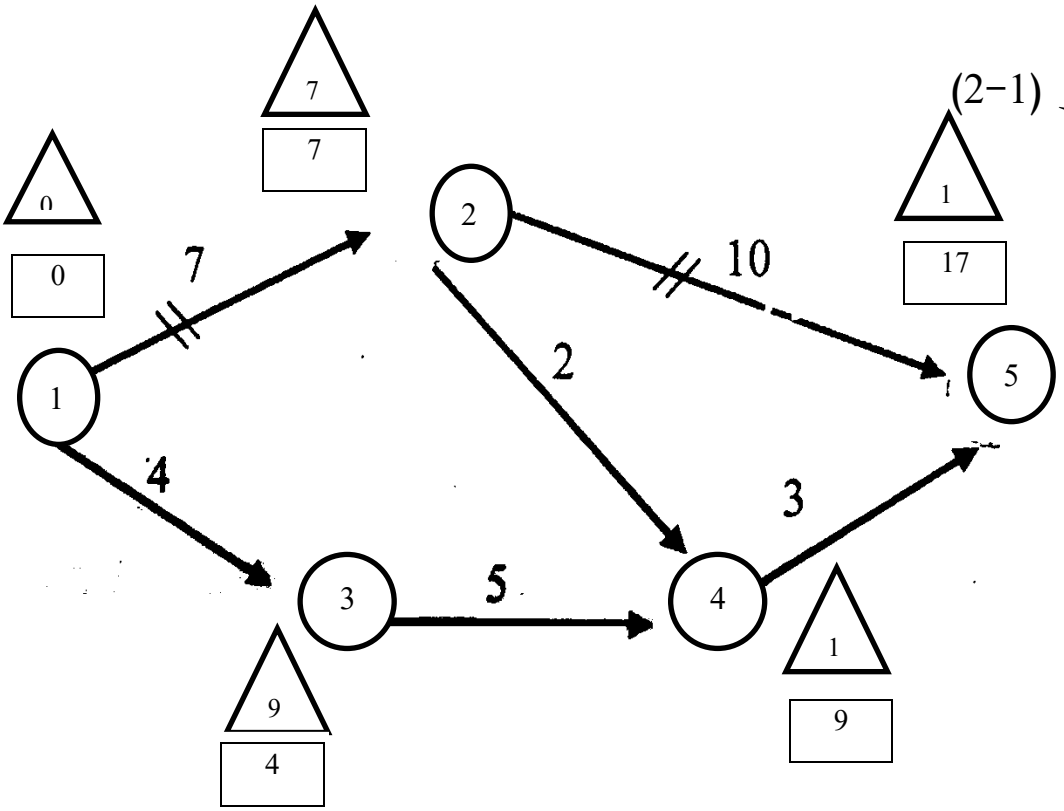


المسار الحرج (1–2) ، (2–5)

Time 18

Cost 580

النشاط المختار (1–2)

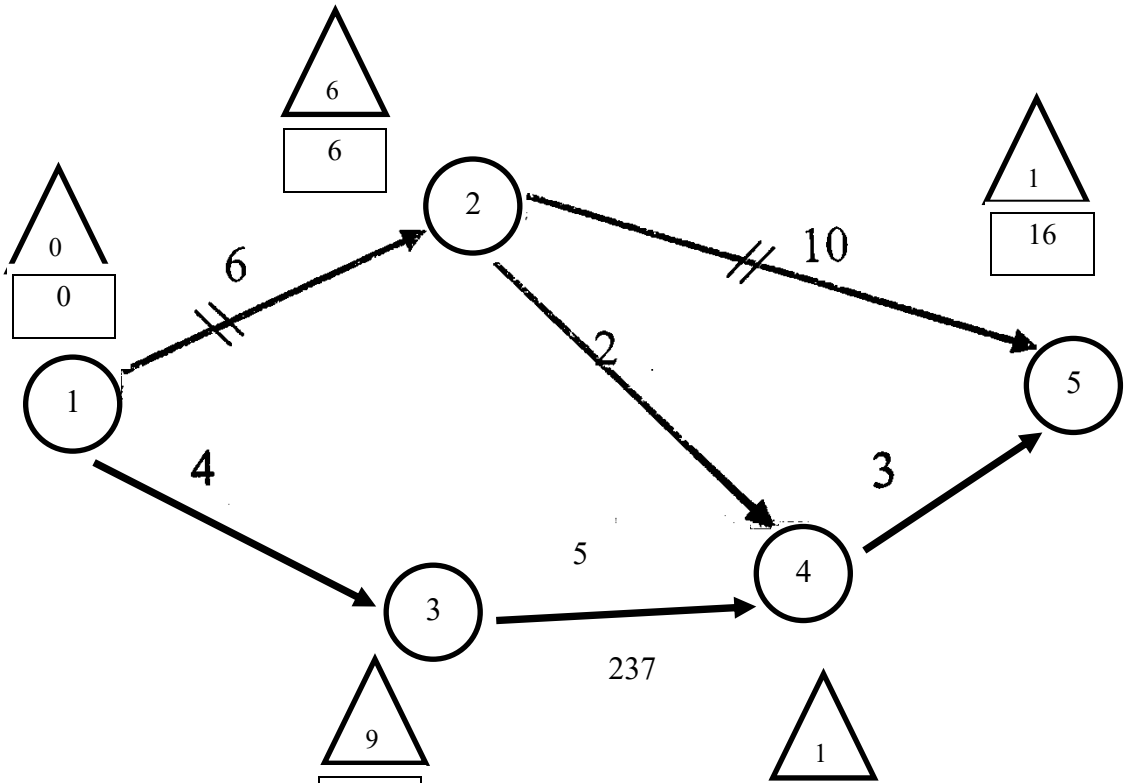


المسار الحرج (1–2) ، (2 –5)

Time 17

Cost 580 630 = 50 +

النشاط المختار (1–2)

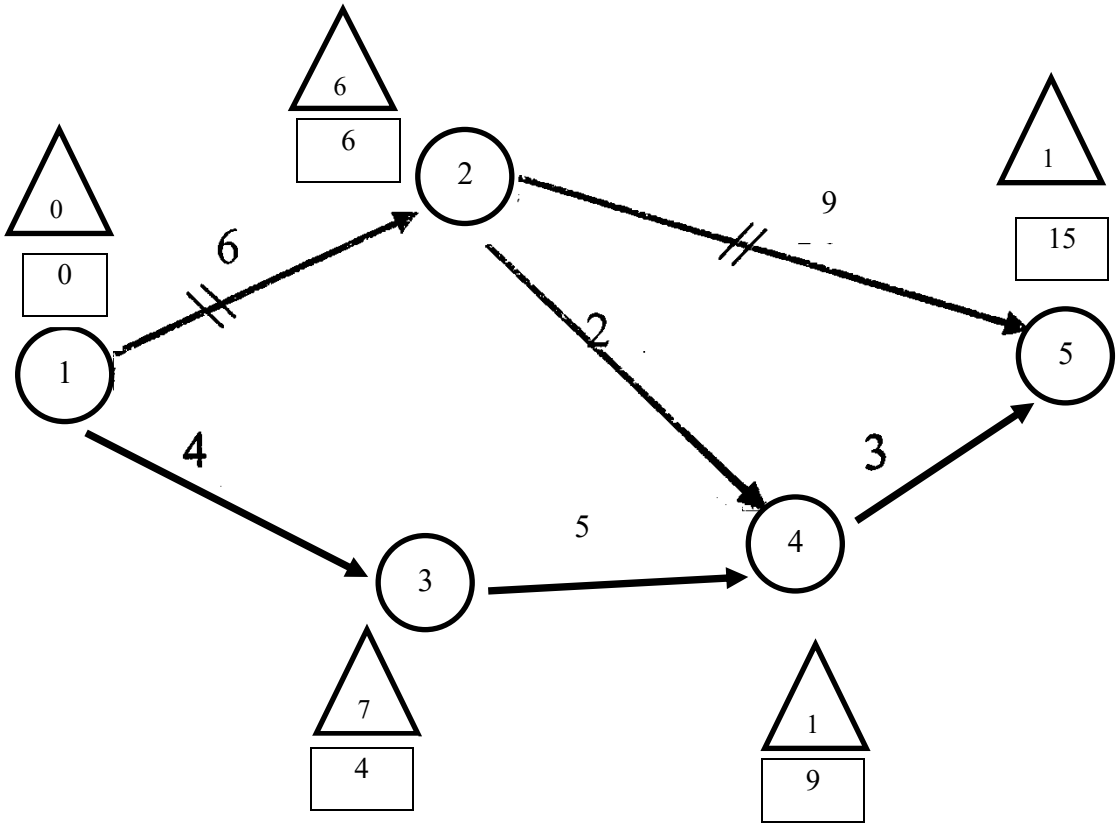


المسار الحرج (1–2) ، (2–5)

Time 16

Cost 630 + 50 = 680

النشاط المختار (2–5) لان النشاط (1–2) وصل الى الوقت التعجيلي

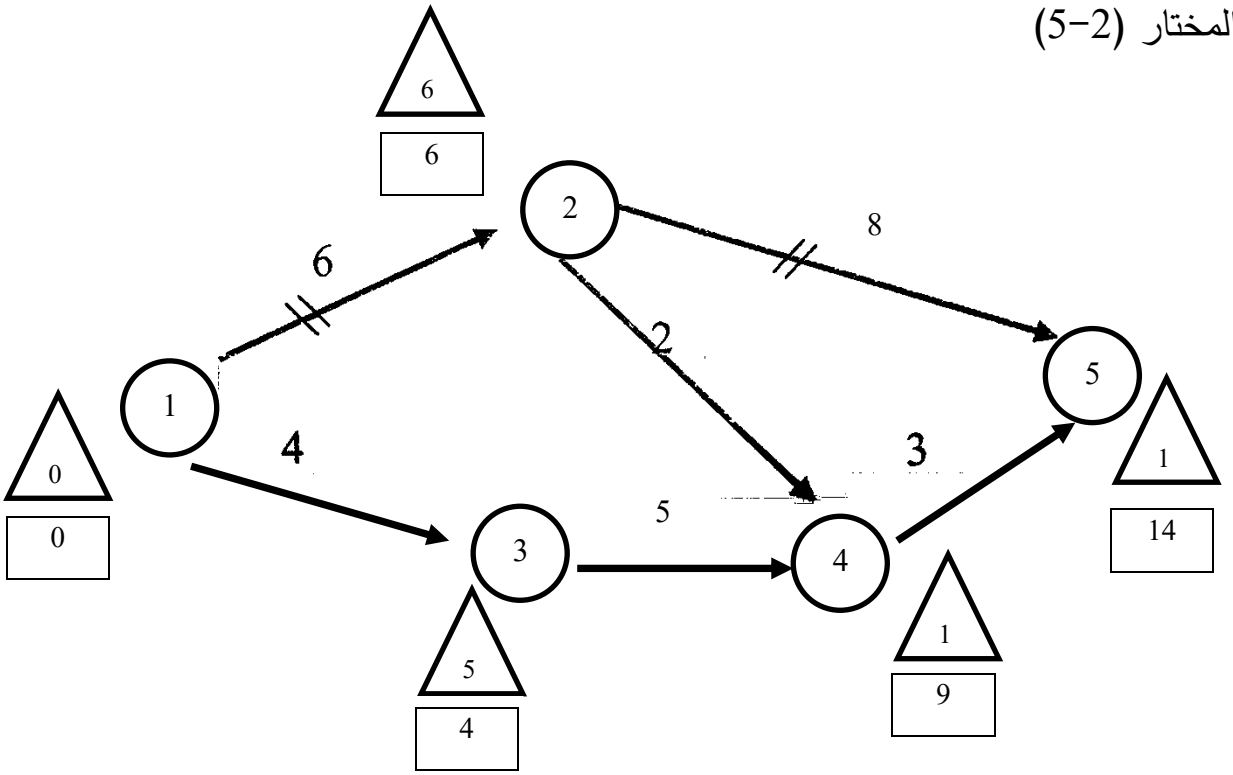


المسار الحرج (1–2) ، (2–5)

Time 15

Cost 680 + 60 = 740

النشاط المختار (2–5)

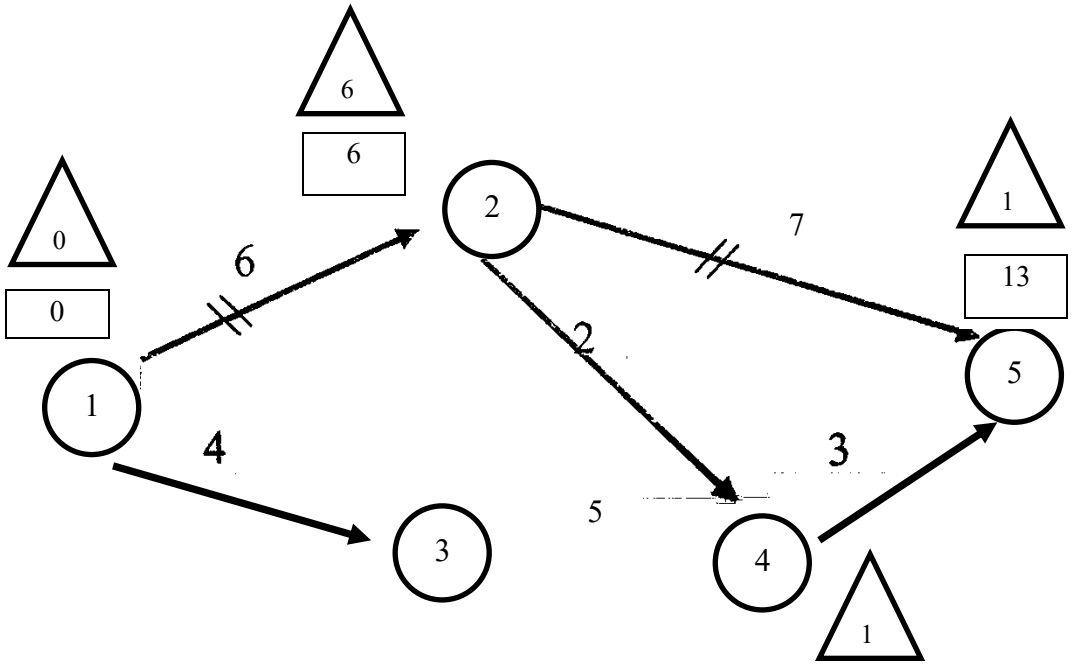


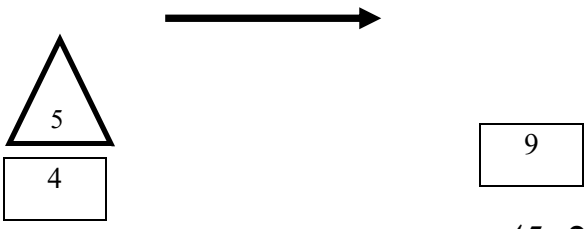
المسار الحرج (1–2) ، (2–5)

Time 14

Cost 740 + 60 = 800

النشاط المختار (2–5)



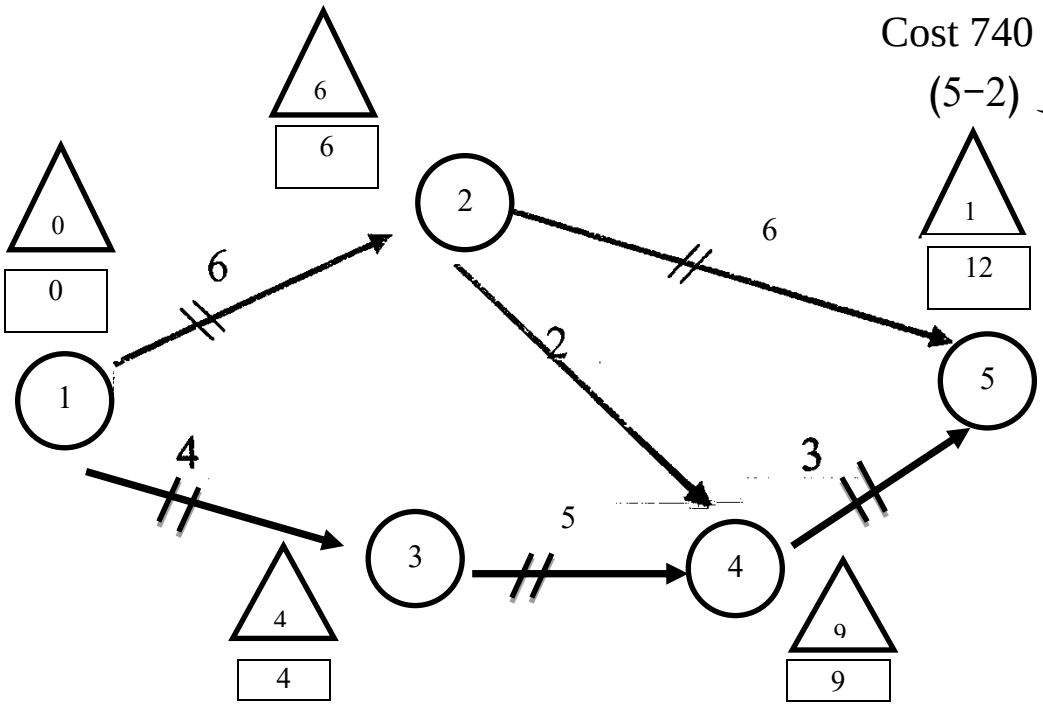


المسار الحرج (1−2) ، (2−5)

Time 13

Cost 740 + 60 = 800

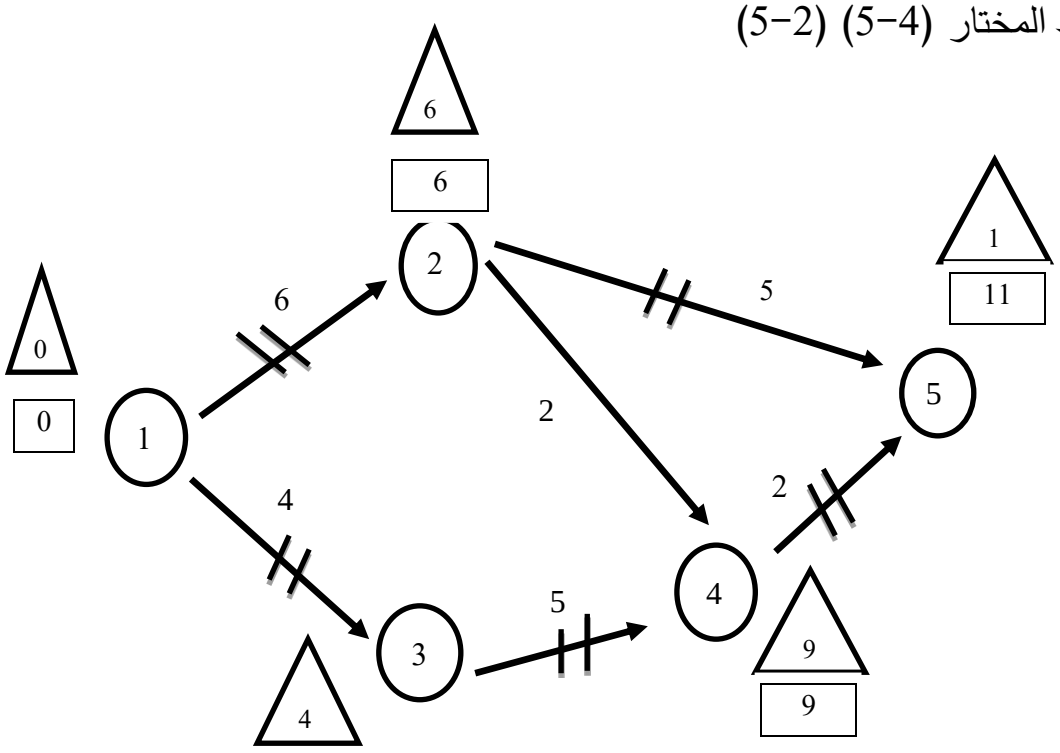
النشاط المختار (2−5)



المسار الحرج (1−2) ، (2−5) والمسار (1−3) ، (3−4) ، (4−5)

Time =12 , Cost 860 + 60 = 920

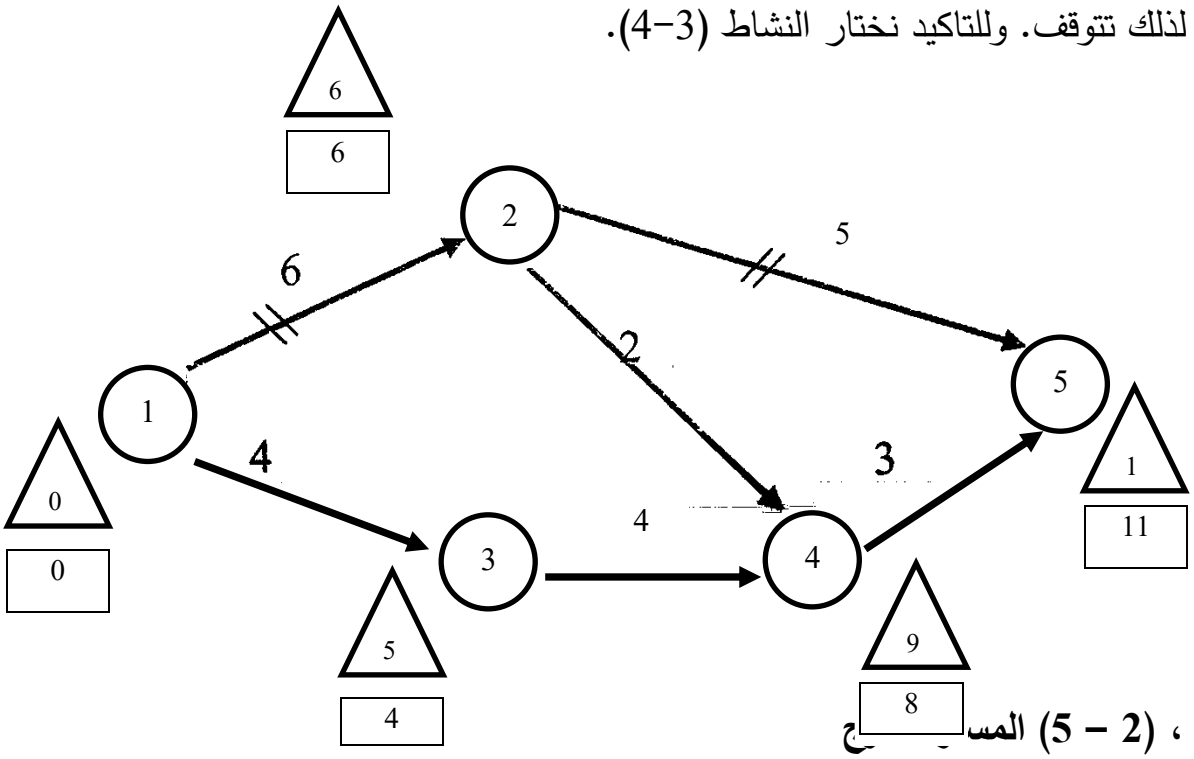
النشاط المختار (4−5) (2−5)



4

\Time= 11 , Cost 920 + 60+10 = 990

ان المسار الحرج 1 2 5 وصل الى الوقت التعجيلي ولا يوجد مجال لتقليل زمن المشروع لذلك تتوقف. وللتاكيد نختار النشاط (3–4).



(1–2) ، (2 – 5) المسار الحرج

Time =11 , Cost 990 + 25 = 1015

تحديد الوقت الفائض: **Determination of the Floats**

يمكن تحديد المسار الحرج من خلال حساب الوقت الفائض. النشاط يكون حرجاً عندما يكون الوقت الفائض لذلك النشاط صفر. وفي الحقيقة هذا هو السبب الرئيسي لجعله حرجاً.

قبل تحديد الوقت الفائض علينا ان نتعرف على نوعين من الأزمنة هما:

أ. وقت الابتداء المتأخر LS) Latest Start Time)

ب.وقت الإنجاز المبكر EC) Earliest Completion Time)

ويمكن حسابهما لكل نشاط (I – j) كما يلي:–

$LS_i = LC_j - D_{ij}$

$EC_{ij} = ES_i + D_{ij}$

وهناك نوعان مهمان من الوقت الفائض هما :

أ. الوقت الفائض المرن ((Free Float (FF)

ب. الوقت الفائض الكلي ((Total Float (TF).

ويمكن ان يعرف الفائض المرن للنشاط (i – j) بانه مقدار التجاوز بين الوقت المتاح (ES_j – ES_i) والوقت اللازم ذلك النشاط D_{ij}

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}$$

على افتراض ان كل الأنشطة تبدأ بأقرب وقت ممكن أما الفائض الكلي للنشاط (i – j) فأنه الفرق بين اكبر وقت متاح ($LC_j - ES_{i)}$ والوقت اللازم لتنفيذ ذلك النشاط

$$TF_{ij} = LC_j - ES_i - D_{ij}$$

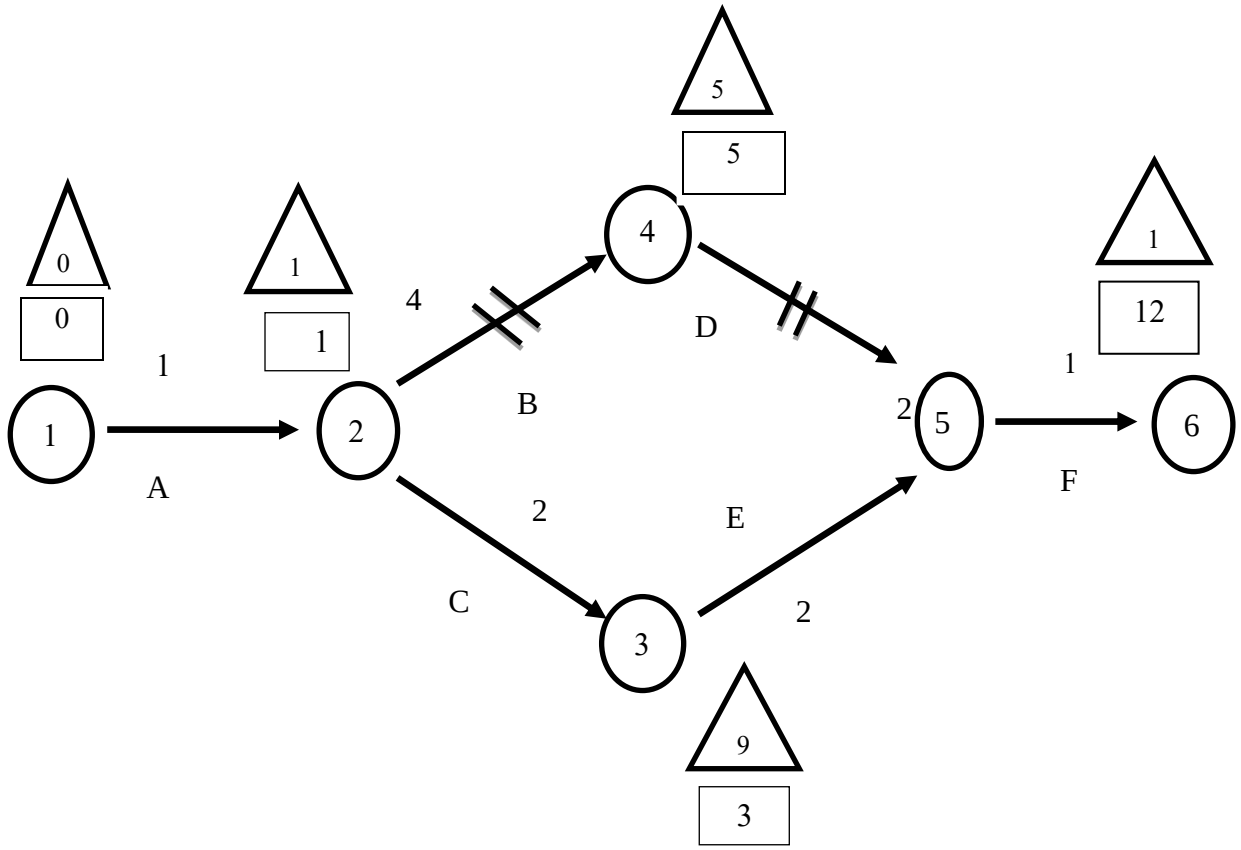
	D_{ij}	ES_i	LC_j	TF_{ij}	FF_{ij}
1-2	3	0	3	0	0
2-3	3	3	6	0	0
2-4	2	3	6	1	1
3-4	0	6	6	0	0
3-5	3	6	13	4	4
3-6	2	6	19	11	11
4-5	7	6	13	0	0
4-6	5	6	19	8	8
5-6	6	13	19	0	0

ان النشاط الحرج هو النشاط الذي يجب ان يكون فيه الفائض الكلي مساوياً الى الصفر. ان الفائض المرن يجب ان يساوي كذلك الصفر عندما يكون الفائض الكلي صفراً ولكن العكس غير صحيح. اي ان النشاط غير الحرج يمكن ان يكون وقته المرن صفراً.

مثال (8): من البيانات الاتية ارسم شبكة الأعمال واحسب الفائض الكلي والفائض المرن للأنشطة ؟.

Example (8): Draw a following data from the business network and calculate the total float and the free float activities?.

Activity	Pervious Activity	Time in (months)
A	….	1
B	A	4
C	A	2
D	B	6
E	C	2
F	D.E	1



النشاط	D_{ij}	ES_i	ES_j	LC_j	TF_{ij}	FF_{ij}

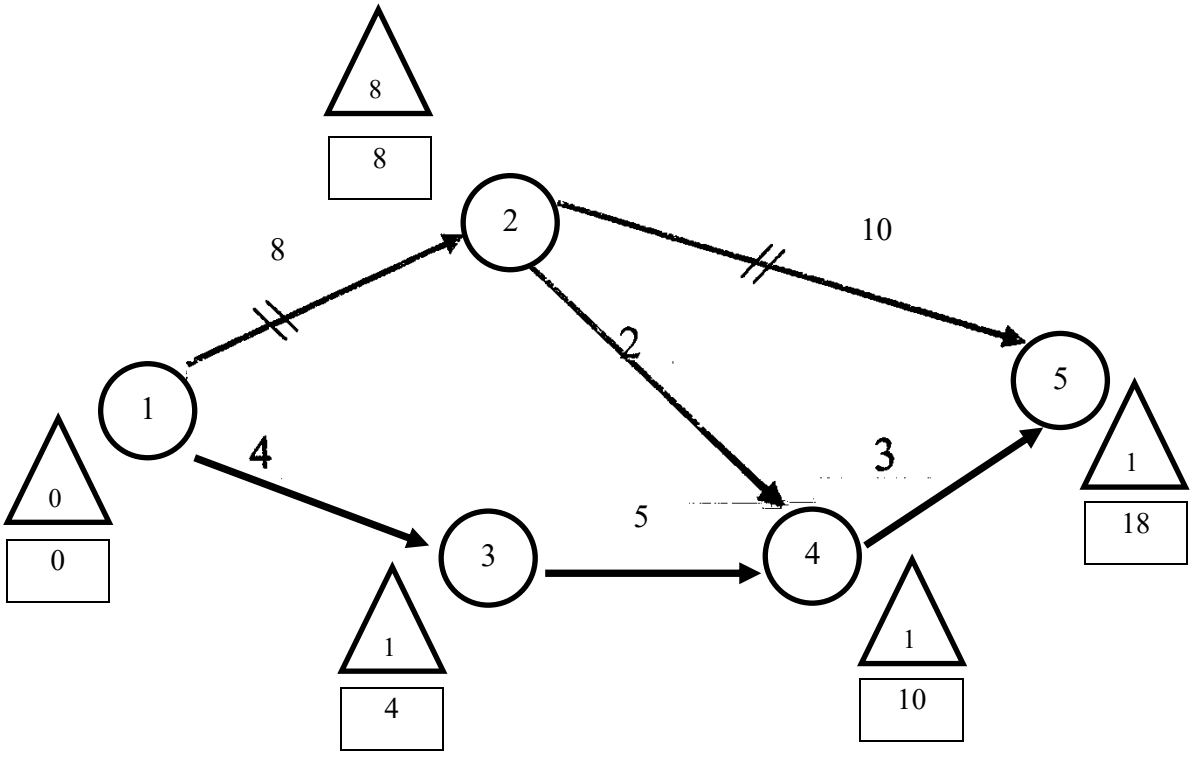
1−2	1	0	1	1	0	0
3−2	2	1	3	9	6	0
2−4	4	1	5	5	0	0
3−5	2	3	11	11	6	6
4−5	6	5	11	11	0	0
5−6	1	11	12	12	0	0

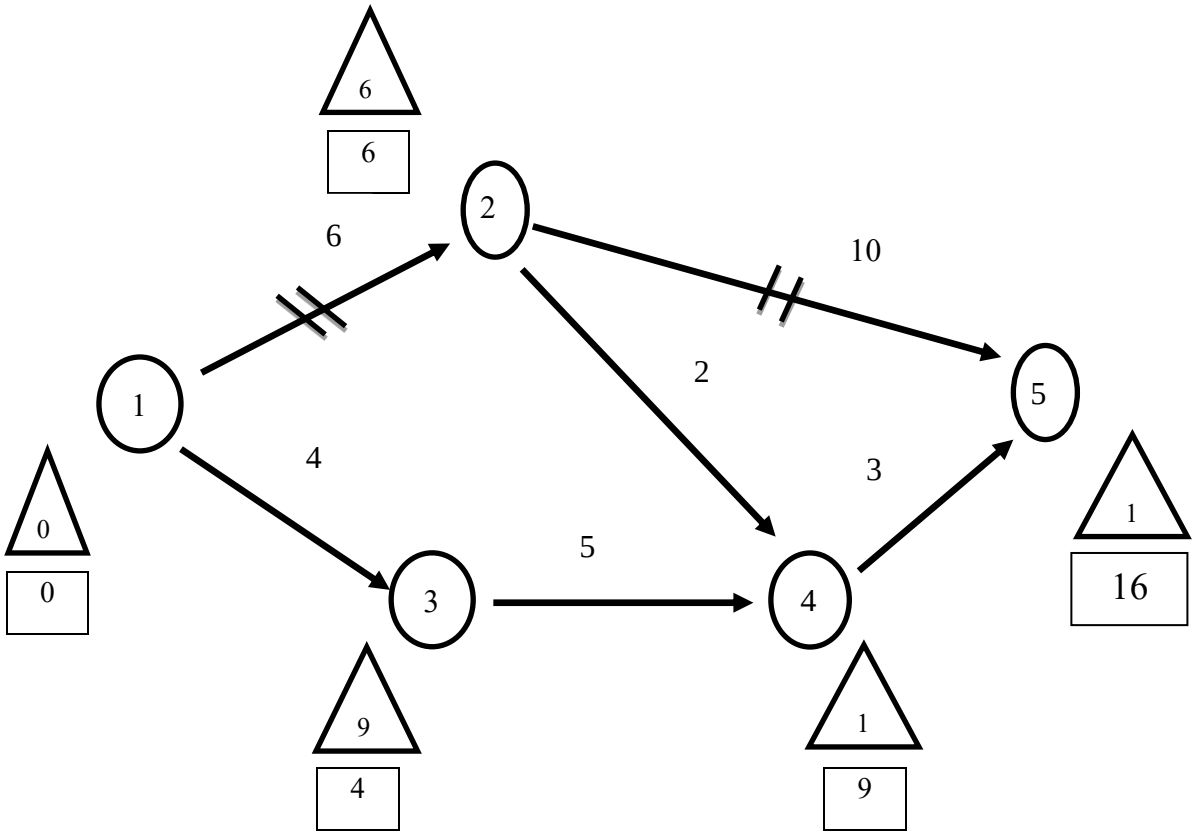
$TF = LC_j - ES_i$ **- D_{ij}**

$FF = ES_j - ES_i - D_{ij}$

الطريقة المختصرة للتخفيض:

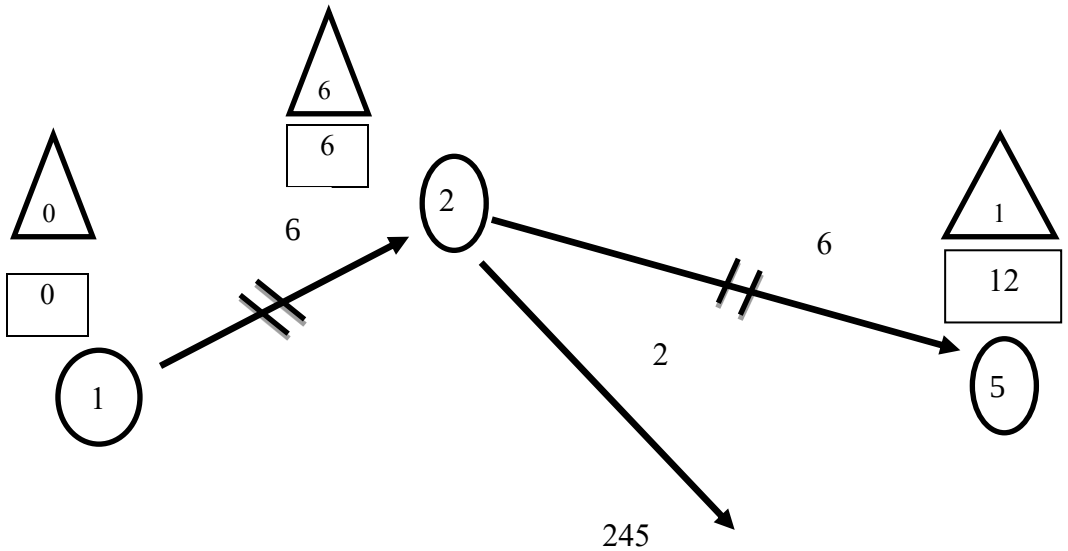
بعد تحديد المسار الحرج للمشروع فانه يمكن تخفيض الوقت الطبيعي للنشاط الحرج ذي الميل الأقل الى الوقت التعجيلي ففي مثالنا السابق يمكن تقليص زمن النشاط (1−2) بمقدار 2 وحدة زمن.

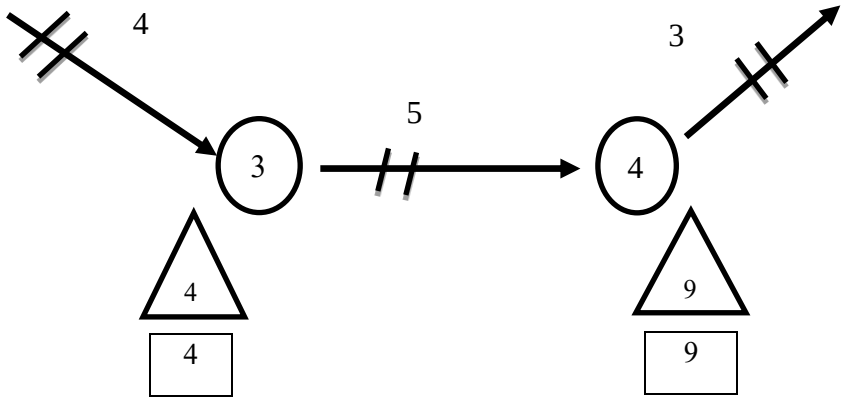




الان النشاط (1–2) لا يمكن تقليصه مرة ثانية لانه في الوقت التعجيلي لذلك علينا تقليص النشاط (2–5) ومن الجدول السابق نعلم ان الوقت التعجيلي لهذا النساط هو (5) وحدات زمنية.

عند تقليص الوقت الطبيعي للنشاط (2–5) بمقدار(5) وحدات زمنية نلاحظ ان الزمن الكلي لتنفيذ المشروع يصبح (12) وحدة زمنية كما في الشكل رقم (3).



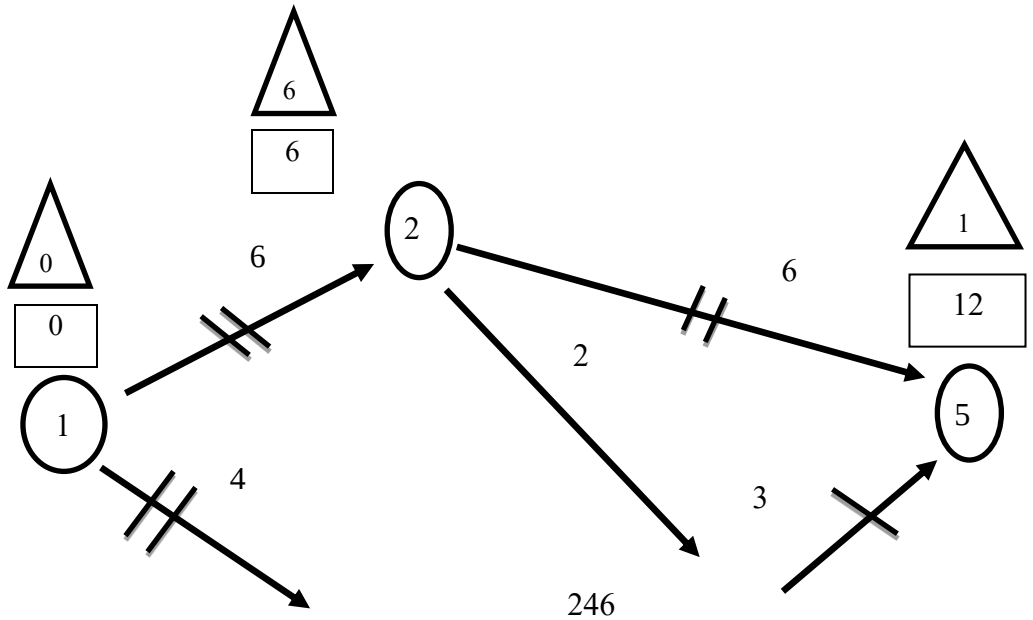


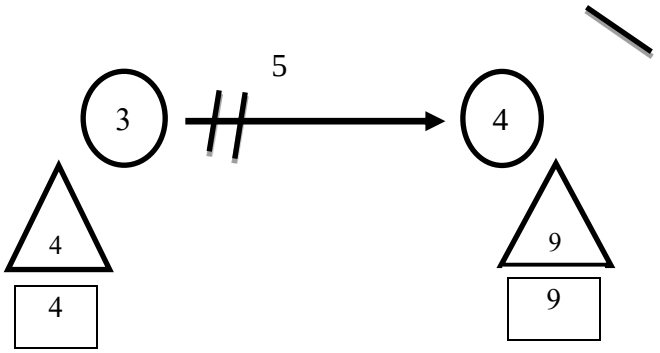
هنا نجد ان تقليص الزمن الطبيعي للنشاط (2–5) بمقدار (5) وحدات زمنية أدى الى تقليص زمن تنفيذ المشروع بمقدار (4) وحدات زمنية، أي اننا تحملنا تكاليف تقليص وحدة زمنية بدون فائدة.

ويرجع سبب عدم التطابق هذا الى ان الوقت الفائض المرن للنشاط (4–5) والتي تقع على المسار الحرج الجديد هو $FF_{4.5} = 4$ كما في الشكل (2) ولذلك لا يمكن تقليص زمن المشروع بأكثر من ذلك الفائض المرن للمسار الحرج المتوقع، لذلك فان من الأفضل تقليص الزمن الطبيعي للنشاط (2–5) بمقدار (4) وحدات زمنية.

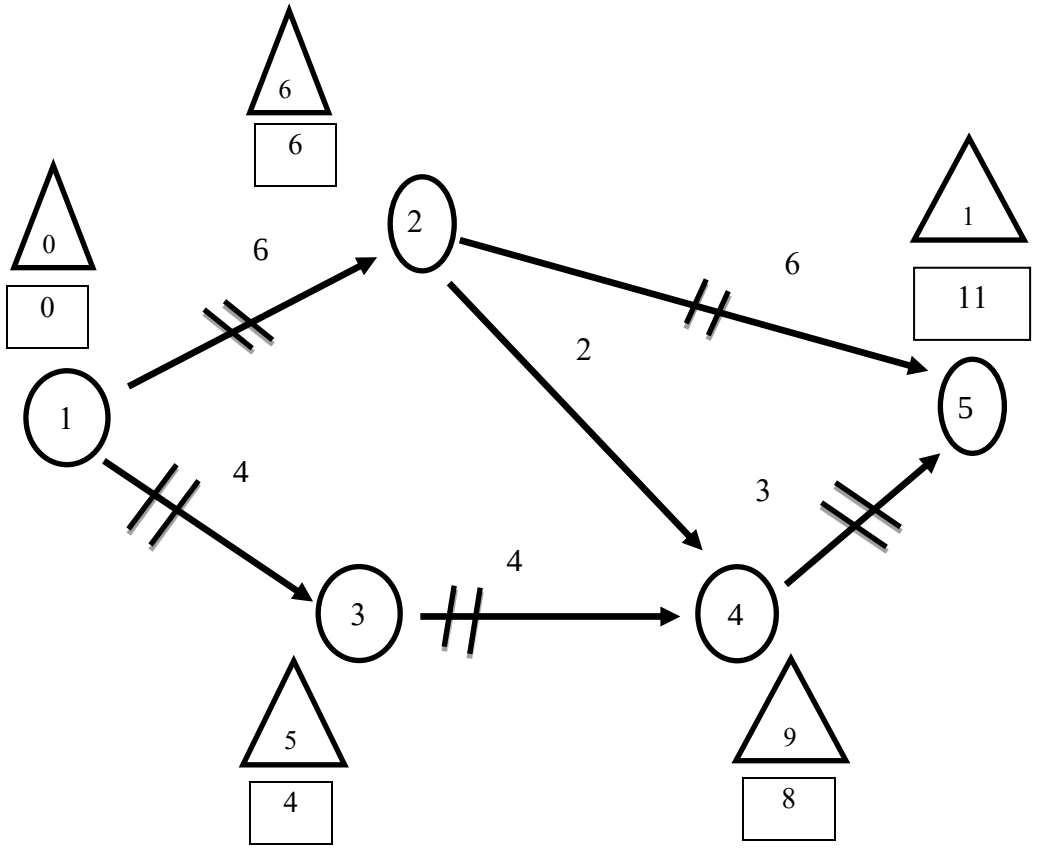
ويمكن توضيح ذلك بما يأتي:

Crash Limit = 10 -5 =5
FF – Limit = 4
Compression Limit = Min (5.4) = 4





لاحظ وجود فائض مرن للنشاط (2−4) (4-2) $FF_{2.4}$ = 1 علماً أن الفائض المرن لبقية الأنشطة يساوي صفر لكونها أنشطة حرجة. لذلك بالإمكان تقليص زمن المشروع بمقدار وحدة زمنية واحدة.



نلاحظ هنا انه بالرغم من وجود فائض مرن للنشاط (2−4) 1 = $FF_{2.4}$ الا انه لا يمكن تقليص وقت المشروع لاقل من (11) وحدة زمن وذلك لان أنشطة المسار الحرج الأول (1−2−5) في وقتها التعجيلي، وان اي تقليص في الأنشطة الأخرى سوف لا يؤثر على وقت تنفيذ المشروع.

اسئلة وتمارين عامة

س1). تتوفر التقديرات الأتية لأوقات نشاطات مشروع صغير (بالأيام). والمطلوب

1. حساب الوقت المتوقع والتباين لكل نشاط؟.
2. تحديد المسار الحرج؟.
3. حساب احتمال تنفيذ المشروع في 30 يوم؟.

Quation 1):

The following estimates are available for a small project activities Times (days). What is needed?

1-Expense the expected time and contrast each activity?

2-Calculet the Critical Path?

3-The possibility of implementing the project in the 30-day expense?

Activity	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
1−2	6	10	14
1−3	10	12	14

1−4	12	16	20
2−5	8	10	12
3−4	4	7	10
3−5	4	6	8
4−5	8	12	16
5−6	3	5	7

Answer : E (T) =36. V=3.666 . C.P. = (1.3) , (3.4) , (4.5) , (5.6). P=0.0008

س2) تقوم شركة بصناعة مظلات فولاذية للتخزين للاستعمالات التجارية. أراد مدير الشركة التوسع في إنتاج مظلات للاستعمالات المنزلية. يبين الجدول ادناه النشاطات اللازمة لبناء نموذج تجريبي مع البيانات الازمة. أحسب

1−حدد المسار الحرج، ما هو وقت انتهاء المشروع؟.

2− بين خطوات الإسراع بإنهاء المشروع في عشرة أسابيع؟.

Quation 2):

The company umbrellas steel industry for the storage of commercial uses. Director of the company wanted to expand in the production of umbrellas for household uses. The table below shows the activities necessary to build the model with experimental data crisis. Figured

1- Select the critical path, what is the time of completion of the project?

2- between steps to expedite the project to end in ten weeks?

Activity	Pervious Activity	Normal Time (Week)	Crash Time (Week)	Normal Cost	Crash Cost
A	−	3	2	1000	1600
B	-	2	1	2000	2700
C	-	1	1	300	600

D	A	7	3	1300	1600
E	B	6	3	850	1000
F	C	2	1	4000	5000
G	D.E	4	2	1500	2000

Answer :
C.P. = (A.D.G.) . Time = 14 ,
T.C = 10950

الفصل التاسع/ البرمجة العددية Integer Programming

9 -1 المقدمة Introduction

9 -2 مفهوم البرمجة العددية Concept of Integer Programming

9-3 أنواع نماذج البرمجة العددية

Types of Integer Programming Models

9-3-1 نموذج البرمجة العددية التامة

Pure Integer Programming Models

9-3-2 نموذج البرمجة العددية المختلط

Mixed Integer Programming Models

9-3-3 نموذج البرمجة العددية الثنائية

Binary Integer Programming9

4-3-9 نموذج البرمجة العددية الثنائية المختلطة Mixed Binary I.P

9-4 طرق حل نماذج البرمجة العددية

Solution methods of Integer Programming Models

الفصل التاسع

البرمجة العددية Integer Programming

9 -1 المقدمة Introduction

يمكننا القول بان العديد من المشاكل التي تواجه المدراء في مجال الاعمال يمكن حلها في ظل حالة واحدة فقط وهي حالة وجود قيم وارقام صحيحة لمتغيرات الحل. ومن امثلة ذلك طلبيات الشراء او التصنيع للسيارات,مكائن انتاجية,اجهزه الالكترونية,طائرات وغيرها,حيث من غير المعقول ان نتحدث عن شراء(20.4) سيارة أو شراء(20.6) ماكنة فيجب التعبير عن هذه الطلبيات بارقام صحيحة كأن نقول شراء(22) ماكنة أو (60) سيارة .

ولذلك عندما نتمكن من قياس مانتكلم عنه والتعبير عنه عدديا, فأننا بالتاكيد نعرف شيأ عنه,اما اذا لم نستطيع قياسه والتعبير عنه عدديا,فأن معرفتنا تكون من النوع الضئيل غير المرضي.

سنركز في هذا الفصل على كيفة حل مشاكل البرمجة العددية بأكثر من اسلوب رياضي لأنواع مختلفة من النماذج الرياضية الخاصة بالبرمجة العددية والتي سنتطرق اليها لاحقا.

ويمكننا القول ان الهدف الأساسي لبناء النماذج الرياضية للبرمجة العددية نابع من الاستجابة لمتطلبات الواقع العملي حيث من المعروف ان الكثير من الحالات والمشاكل التطبيقية لايمكن التفاعل معها بقيم كسرية.

9 -2 مفهوم البرمجة العددية Concept of Integer Programming

يعتبر نموذج البرمجة العددية من احد النماذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية ويتكون من دالة هدف ومن قيود وشروط عدم سالبية ويختلف عن البرمجة الخطية العادية بانه يجب ان يكون واحد او اكثر من قيم الحل في شكل ارقام صحيحة وعلى وجه التحديد في جدول الحل النهائي(الامثل) أي يجب ان تكون قيم المتغيرات ارقام صحيحة خالية من الكسور ويمكن تعريف برمجة الاعداد الصحيحة بأنه (اسلوب رياضي للبرمجة الخطية يقدم حلولا لمشاكل البرمجة الخطية وفي شكل اعداد أو ارقام صحيحة).

وتعتبر اخطاء التقريب في حل المشاكل العددية من اهم الصعوبات الحسابية في البرمجة العددية وقد ادت هذه الصعوبات الحسابية الى التفكير في استخدام طرق بديلة لحل المشكلة وأحدى هذه الطرق البديلة هو حل المشكلة على انها برمجة خطية عادية فاذا تضمن الحل الامثل متغيرات بقيم كسرية يتم تقريب الكسور الى اقرب رقم عددي صحيح. فمثلا اذا ظهر الحل النهائي بأن عدد السيارات التي سيتم شرائها حسب الحل الامثل بطريقة البرمجة الخطية هو (10.6) يتم تقريب هذا الرقم الى (11) وتتمثل المشكلة لطريقة التقريب هذه في التوصل الى حلول غير ممكنة تتجاوز القيود المفروضة, فعلى سبيل المثال قد لايكون قيد الاموال المتاحة الا لشراء(10.6) سيارة على الاكثر اذا ان عملية التقريب الى شراء(11) سيارة سيجعل الحل غير ممكن, لانه بعيد عن الامثلية المطلوبة بالحل بالاعداد الصحيحة بلغة دالة الهدف. ولذلك كان لابد من ايجاد اساليب جديدة تتعامل مع هذه الحالات التي تكون فيها متغيرات القرار اعداد صحيحة[2].

الصيغة الرياضية العامة لنماذج البرمجة العددية

$$\text{Maximize Or Minimize } Z = \sum_{j=1}^{n} CjXj \quad \ldots\ldots(1)$$

S. t: ,

$$\sum_{j=1}^{n} aijXj(\leq, =, \geq)bi \qquad i = 1,2,..,m \ldots\ldots(2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} Xj \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n \ldots\ldots(3)$$

حيث ان :-

Z= تمثل قيمة دالة الهدف.

Xj= تمثل متغيرات القرار.

Cj= تمثل معاملات متغيرات القرار(Xj) في دالة الهدف.

bi= تمثل كمية المصدر(i) المخصصة للقيد i .

aij= تمثل كمية المصدر(i) المخصصة للمتغير Xj .

9-3 أنواع نماذج البرمجة العددية

Types of Integer Programming Models

يشمل الانموذج الرياضي العام للبرمجة العددية على مجموعة من النماذج التي تخص كل حالة من حالات الانموذج الرياضي.

9-3-1 نموذج البرمجة العددية التامة

Pure Integer Programming Models:

اذا كانت الوحدات القياسية لجميع متغيرات القرار غير قابلة للتجزئة وصحيحة ففي هذه الحالة تسمى(Pure Integer Programming Models:) لذلك تكون لها خوارزميات خاصة لقطع منطقة الحلول الممكنة للبرمجة الخطية للوصول بجميع قيم متغيرات القرار الى الاعداد الصحيحة لان برمجة الاعداد الصحيحة هي امجموعة جزئية من منطقة الحلول الممكنة للبرمجة الخطية ويسمى هذا الاسلوب الذي يتعامل مع هذه النوعية من المشاكل بأسلوب التفرع والتحديد الذي تكون فيه جميع متغيرات القرار اعداد صحيحة.

Maximize Or minimize Z =$\sum_{j=1}^{n}$ CjXj ……(1)

S t: ,

$\sum_{j=1}^{n}$ aijXj$(\leq, =, \geq)$bi i = 1,2, . . , m……(2)

$\sum_{j=1}^{n}$ Xj ≥ 0 *and integer* j = 1,2, … , n … … . . (3)

2-3-9 نموذج البرمجة العددية المختلط

Mixed Integer Programming Models

اذا كانت الوحدات القياسية لقسم من متغيرات القرار قابلة للتجزئة والقسم الاخر غير قابل للتجزئة اي مختلط ففي هذه الحالة تكون لها خوارزميات خاصة لقطع منطقة الحلول الممكنة للبرمجة الخطية للوصول بقسم من قيم متغيرات القرار الى الاعداد الصحيحة

Maximize Or Minimize Z =$\sum_{j=1}^{n}$ CjXj

S.t: ,

$\sum_{j=1}^{n}$ aijXj$(\leq, =, \geq)$bi i = 1,2, . . , m

$\sum_{j=1}^{n}$ Xj ≥ 0 *and some integer* j = 1,2, … , n

3-3-9 نموذج البرمجة العددية الثنائية

Binary Integer Programming:

اذا كانت جميع متغيرات القرار ثنائية تكون قيمها (0) أو(1) وهناك تطبيقات كثيرة على هذه الصيغة منها كيفية تحديد العدد الامثل للمراكز الخدمية وتحديد مواقع هذه المراكز وتكون الصيغة الرياضية لهذا النموذج

Maximize Or Minimize Z =$\sum_{j=1}^{n}$ CjXj

S t: ,

$\sum_{j=1}^{n}$ aijXj$(\leq, =, \geq)$bi i = 1,2, . . , m

$\sum_{j=1}^{n} Xj = 1 \text{ Or } 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$

9-3-4 نموذج البرمجة العددية الثنائية المختلطة Mixed Binary I.P

تكون فيها بعض متغيرات القرار ثنائية وبقية متغيرات القرار اما قيم عددية أو مختلطة.

$\text{MinZ} = \sum_{j=1}^{n} CijXj + \sum_{i=1}^{m} Fi\ yi$

S. t:

$\sum_{i=1}^{m} Xij = dj \qquad j = 1,2,\dots,n$

$\sum_{i=1}^{m} Xij - y_j \sum_{j=1}^{n} d_j <= 0$

$Xij \geq 0$

$Yi = 0 \text{ or } 1; i = 1,2,\dots,m \ , j = 1,2,\dots,n$

حيث ان

Xij = الكمية المنقولة من المصدر i الى الموقع j

Fi = للمصدر i ذو الكلفة الثابته

Cij = كلفة نقل وحدة واحدة من المصدر i الى الموقع j

9-4 طرق حل نماذج البرمجة العددية

Solution methods of I.P Models

1. طريقة الرسم:(Graphical method) تستخدم هذه الطريقة عندما يكون لدينا متغيرات القرار اثنان فقط فنقوم بعملية الرسم من خلال تمثيل المحور الافقي للمتغير الاول والمحور العمودي للمتغير الثاني ونرسم هذه القيود على شكل خطوط مستقيمة ونحصل على منطقة الحلول الممكنة كما معمول في طريقة الرسم باسلوب البرمجة الخطية ولغرض الحصول على متغيرات القرار ذوات قيم صحيحة لمتغير واحد او متغيرين حسب شروط النموذج الرياضي نقوم بأقتطاع جزء من منطقة الحلول الممكنة للمتغير الاول عندما نجعل المتغير الاول رقم صحيح ونكرر العملية بأنشاء منطقة حلول ممكنة أخرى من خلال جعل المتغير الاول رقم صحيح ونكرر العملية بأنشاء منطقة حلول ممكنة أخرى من خلال جعل المتغير الثاني

رقم صحيح وهكذا نستمر بأقتطاع أجزاء من منطقة الحلول الممكنة الى أن تتحقق شروط متغيرات القرار من خلال جعل متغيرات القرار الى اقرب رقم صحيح ثم نقوم برسم منطقة الحلول فاذا كانت المنطقة تشترك فيها جميع قيود المشكلة نحصل على حل امثل, واذا كان عكس ذلك لانحصل على حل امثل ولذلك نرفض هذا التقريب الى احد متغيرات القرار ثم نقوم بتقريب متغير ثاني الى اقرب رقم صحيح ونرسم منطقة الحلول, وهكذا نعيد عملية تقريب المتغيرات الى ارقام صحيحة فنحصل بالنتيجة على مجموعة من الحلول الغير منطقية ومجموعة من الحلول المقبولة ليكون الحل الامثل حسب نوعية دالة الهدف,ولكن هذه الطريقة تعتبر طريقة تعليمية وذلك لقلة عدد المتغيرات في النموذج الرياضي وهذا غير منطقي ولذلك لابد ان تكون هناك طريقة أخرى أكثر كفاءة تتعامل مع مجموعة من المتغيرات.

ولغرض توضيح خطوات الحل نستعرض المثال الاتي:

مثال رقم (1):-

معمل نجارة ينتج نوعين من المنتجات طبلات وكراسي . الطبلة الواحدة تحتاج الى ساعة عمل واحدة وتحتاج الى (9) قدم مربع من مادة الخشب والنوع الثاني وهو الكرسي يحتاج الى ساعة عمل واحدة و(5) قدم مربع من مادة الخشب ان الكميات المتاحة من الخشب هو(45) قدم مربع من مادة الخشب, و(6) ساعات عمل في اليوم الواحد. ان ربح الطبلة الواحدة هو$8 وربح الكرسي $5. اوجد الحل الامثل لتعظيم معمل النجارة بشرط ان تكون الوحدات المنتجة من الكراسي والطبلات الخشبية هي اعداد صحيحة غير قابلة للتجزئة.

Example (1):

Carpentry plant manufactures table and chairs. At able requires 1hour of labor and 9 square board feet of wood, and a chair requires1hour of labor and 5 square board feet of wood.currently,6 hours of labor and 45 square board feet of wood are available. Each table contributes $8 to profit, and each chair contributes $5 to profit. Formulate and solve an IP to maximize carpentry plants profit.

Solution: let X1=number of tables manufactured

X2= number of chairs manufactured

SinceX1and X2 must be integer, Carpentry plant wants to solve the following IP: Max Z = 8X1+5X2

S.t X1+X2 <=6 (labor constraint)

9X1+5X2<=45(wood constraint)

X1,X2>=0; X1,X2 integer

1- نجد الحل الامثل بأستخدام طريقة الرسم للبرمجة الخطية

Z=165/4, X1=3.75, X2= 2.25

Figure-1- كما موضح بالشكل رقم (1)

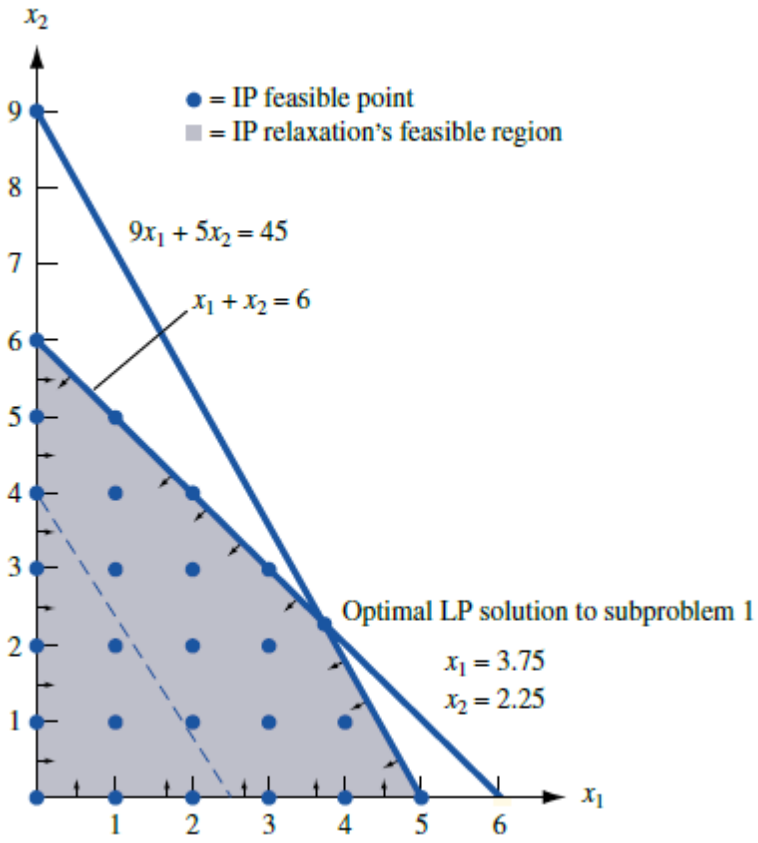


Figure-1-

2- نقتطع جزء من منطقة الحلول الممكنة لذلك نأخذ المتغير الاول X1 قيدين اضافة الى القيد الاصلي فيكون على الشكل الاتي X1>=4, القيد الاول,(X1<=3) القيد الثاني فنحصل من

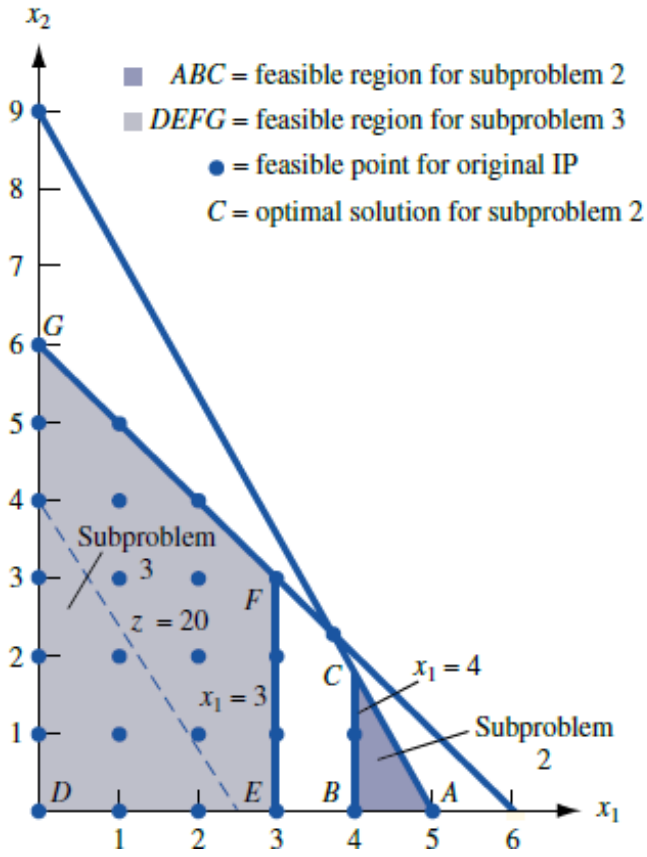
خـلال اضـافة القيـد الاول (X1>=4) الـى منطقـة الحلـول الممكنـة نحصـل علـى النتـائج الاتية...(Z=41,X1=4,X2=9/5)(subproblem-2) .

Subproblem-2= subproblem-1+constraint X1>= 4.

3- , وعنـد اضـافة القيـد((X1<=3) الـى منطقـة الحلـول الممكنـة نحصـل علـى النتـائج الاتية...(Z=39,X1=3,X2=3) (subproblem-3)

Subproblem-3= subproblem-1+constraint X1<= 3.

كما موضح بالشكل رقم (2)(see figure-2)



(Figure-2)

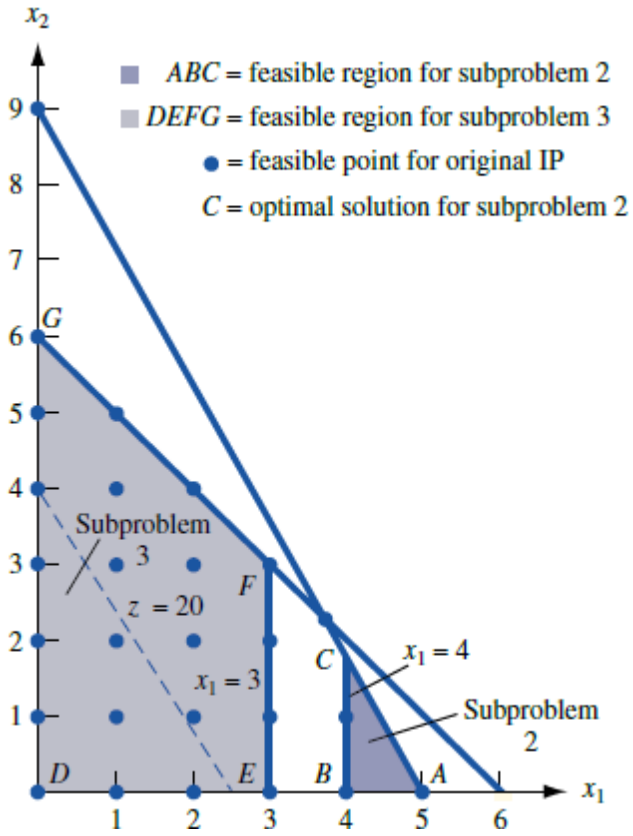
4- ومن خـلال اضـافة القيد الاول (X1>=4) مـع قيد المتغيرX2 (X2>=2) نحصـل على منطقة حلول غير ممكنه(infeasible solution) (Subproblem-4) .

Subproblem-4= subproblem-1+ (X1>=4) and (X2>=2)

5- فعند اضـافة القيد الاول (X1>=4) مـع قيد المتغير الثـاني1=>X2 نحصـل على منطقة حلول (Z=165/4,X1=40/9,X2=1) (subproblem-5).

Subproblem-5= subproblem-1+ (X1>=4) and (X2<=1)

كما موضح بالشكل رقم (3) -Figure-3



(Figure-3)

6- ومن اضافة قيد (X1>=5)الى(Subproblem-5) نحصل على منطقة الحلول(Z=40,X1=5,X2=0) (Subproblem-6).

7- ومن اضافة قيد (X1<=4)الى (Subproblem-5) نحصل على منطقة الحلول(Z=37,X1=4,X2=1) (Subproblem-7).

نلاحظ ان افضل حل يحقق قيود المشكلة هي (Z=40,X1=5,X2=0 (Subproblem-6).

كما موضح بالشكل رقم (4) -Figure-4

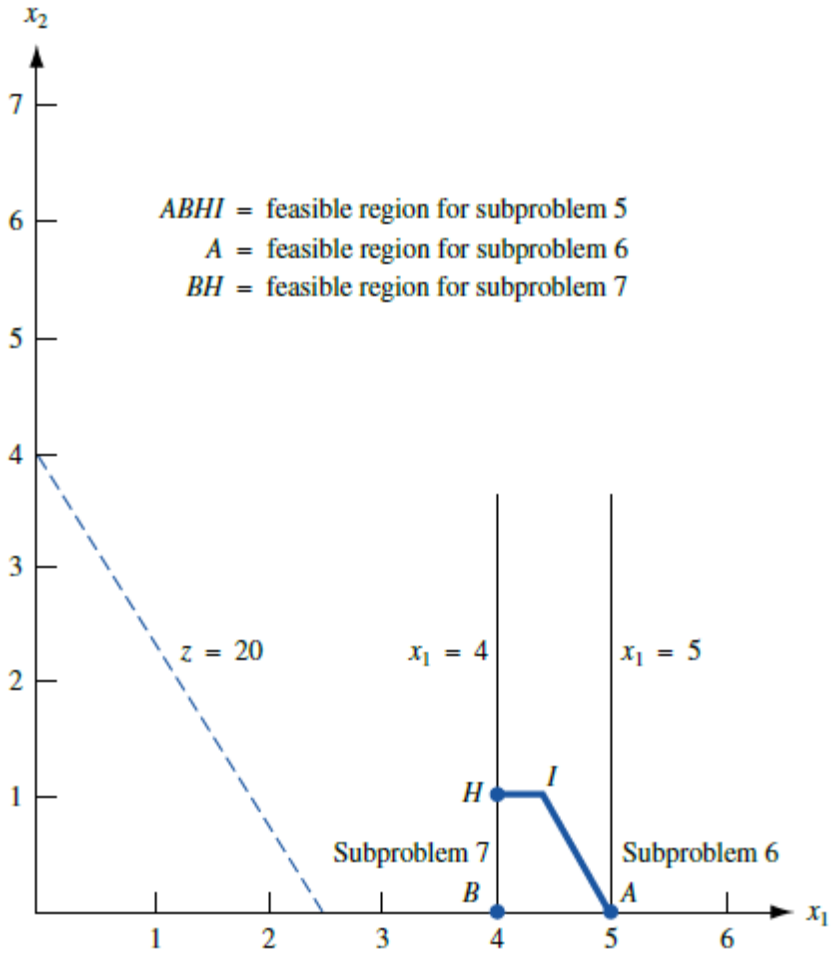


Figure-4-

2. طريقة قطع المستوي كومري(Cutting plan method Gomory):

ان طريقة قطع المستوي التي توصل اليها كومري تعتمد بشكل اساسي على طريقة السمبلكس التي نحصل من خلالها على حل أمثل ذي قيم حقيقية, حيث في البدء يهمل شرط الاعداد الصحيحة ويحل السؤل بطريقة السمبلكس الاعتيادية أو السمبلكس المعدل كأي مسألة من مسائل البرمجة الخطية,فاذا كان الحل الامثل اعداد صحيحة فان ذلك الحل سيكون هو الحل العددي المطلوب,أما اذا كانت بعض قيم ذلك الحل كسورا فسنختار أكبر هذه الكسور ليكون لنا قيد جديدا يضاف الى نهاية اخرجدول توصلنا الية بطريقة السمبلكس حيث يتم بعدها اكمال الحل بطريقة السمبلكس المقابل وهكذا نستمر بالحل الى ان نصل الى الحل العددي الامثل.ان القيد المضاف هو عبارة عن قيد قطع من خلالة يقتطع جزء معين من حيز الحل الذي يحتوي على قيم ليست بأعداد صحيحة وبعبارة اخرى ان القيد الثانوي المضاف يقطع ذلك الجزء من

حيز الحل الذي لايحتوي على قيم عددية صحيحة حيث ان اضافته الى الجدول يجعل المسألة خاضعة لعدد مختلف من القيود عما كانت علية المسألة الاساسية ولغرض الحصول على حل أمثل للمسئلة بقيودها الجديد نطبق طريقة السمبلكس المقابل فاذا تم الحصول على حل عددي صحيح نتوقف وبخلافه يشكل قيد قطع ثانوي اخرى وهكذا تعاد الخطوات نفسها, ان طريقة قطع المستوي لكومري طريقة فعالة جدا لحل مشاكل البرمجة العددية لكنها بطيئة بسبب كثيرة التكرارات التي نواجهها في المشاكل الكبيرة .

ويمكن ان نحدد الخطوات الاساسية لطريقة قطع المستوي لكومري وهي:

1- نجد حلا أمثل للمسألة بتطبيق طريقة السمبلكس.
2- اذا كانت نتائج الخطوة الاولى ذات قيم عددية صحيحة نتوقف ونكون بذلك قد حصلنا على الحل العددي الامثل وبعكس ننتقل الى الخطوة رقم (3).
3- يتم اضافة قيد قطع(قطع ثانوي) يتجه الحل من خلاله نحو القيمة العددية الصحيحة.
4- بعد اضافة قيد القطع الثانوي الى مجموعة قيود المسئلة الاساسية نطبق طريقة السمبلكس المقابل فاذا كانت النتائج ذات قيم عددية صحيحة نتوقف وبعكسه تتم عملية قطع جديد,نكرر العملية حتى يتم الحصول على الحل العددي الامثل.

فأذا فرضنا أن Xi يمثل المتغير الاساس في جدول الحل الامثل والذي قيمته bi ليست أعدادا صحيحة,فأن معادلة هذا المتغير في جدول الحل الامثل بطريقة السمبلكس الاعتيادية سيحسب كما يأتي:

$$Xi+\sum^{n}_{j=1} aijsj = bi \quad i = 1,2,..,m(1)$$

aij=[aij]+fij , bi=[bi]+fi

[bi] : يمثل اكبر عدد صحيح ويكون اقل أو يساوي bi.

[aij] : يمثل اكبر عدد صحيح ويكون اقل أو يساوي aij.

0<=fij<=1, 0<=fi<=1

ويمكن ان نستنتج بعد التعويض بالمعادلة (1) أن:-

$$Xi+\sum_{j=1}^{n}([aij] + fij)sj = [bi] + fi \quad i = 1,2,..,m$$

وذلك لانfiهو كسر موجب وان fij هو كسر غير سالب. حيث يمكن ان نستنتج بعد التعويض في المعادلة(1) أن:

fi-$\sum_{j=1}^{n} fijsj = xi - [bi] + \sum_{j=1}^{n}[aij]sj$ ….(2)

حيث ان جميع قيم Xi,Sj هي قيم عددية, وبما ان الجانب الايمن من المعادلة(2) يجب ان يكون عدديا لذلك يجب ان يكون الجانب الايسر عدديا ايضا.

Fij>=0 and Sj>=0 for all I,j

$\sum_{j=1}^{n} fijsj \geq 0 \quad \Rightarrow fi - \sum_{j=1}^{n} fijsj \leq fi$ لذلك سيكون

fi<1……$fi - \sum_{j=1}^{n} fij \leq 1$ لذلك سيكون

وبما ان الطرف الايسر يجب ان يكون عددا صحيحا لذلك ستنتج:-

f i -$\sum_{j=1}^{n}$fijSj<=0

لذلك سيكون

f i -$\sum_{j=1}^{n}$fijSj=0

حيث يمكن ان نكتب المعادلة الاخيرة بالشكل الاتي:

.. - $\sum_{j=1}^{n}$fijSj<=-f i

$\sum_{j=1}^{n}$fijSj>=fi

لذلك$\sum_{j=1}^{n} fijsj + si = _fi$

Si = $\sum_{j=1}^{n} fijsj - fi$ ……(3)

حيث أنSj متغير غير اساسي,Si متغير مهمل غير سالب يحقق كون معادلة القيد ذات قيم عددية صحيحة, وتدعى المعادلة(3) بمعادلة قيد القطع الكسري التي ستضاف الى جدول السمبلكس. وبعد ذلك سنحل المسائلة بطريقة السمبلكس المقابل فأذا كان جدول الحل الامثل أعدادا صحيحة نتوقف وبعكسه سنضيف قيد قطع جديد الى نهاية الجدول ونستمر بالحل الى حين الحصول على الحل العددي الامثل. أما اذا حصلنا اثناء تطبيق طريقة السمبلكس المقابل على معلومات تشير الى عدم امكانية الحصول على حل عددي أمثل للمسألة الاساسية.

ولغرض توضيح خطوات الحل نستعرض المثال الاتي:

مثال (2):- اوجد الحل الامثل للنموذج الرياضي الخطي الاتي:

Max Z=X1+X2

S.t $2X1+X2 \leq 6$, $X1+4X2 \leq 12$, $X1, X2 \geq 0$ and integer.

Example (2):- Find the optimal solution for the mathematical linear programming model:

Max Z=X1+X2

S.t $2X1+X2 \leq 6$

$X1+4X2 \leq 12$

$X1, X2 \geq 0$ and integer

الحل: 1- من خلال استخدام طريقة السمبلكس الاعتيادية نحصل على الحل الامثل كما موضح في الجدول ادناه:

Table (1)

B.V	X1	X2	S1	S2	RHS
Z	0	0	0.4	0.1	4.3
X1	1	0	0.6	-0.1	1.7
X2	0	1	-0.1	0.3	2.6

نستنتج ان Z= 4.3,X1=1.7,X2=2.6

1- كما نلاحظ ان النتائج التي تم الحصول عليها في الخطوة الاولى ليست ذات قيم عددية صحيحة لجميع المتغيرات ننتقل الى الخطوة رقم (3).

2- نكون قيد قطع ثانوي يضاف الى جدول الحل الامثل(1) وتعتمد عملية تكوين هذا القطع على المتغير الاساس ذو القيمة الحقيقية في عمود الحل (R.H.S) الذي يمتلك اكبر جزء حقيقي من بين المتغيرات الحقيقية الاخرى, ومن جدول (1) نلاحظ ان الجزء الحقيقي للمتغير X1 هو(0.7) اما الجزء الحقيقي للمتغير X2 هو(0.6) لذلك سنختار صف المتغير X1 اما المعادلة التي تقابل هذا المتغير في جدول الحل الجديد فتحسب باالشكل الاتي:- (X1+0.6S1- 0.1S2=1.7) .

اذ يمكن اعادة كتابة المعادلة اعلاه ب صيغة اخرى بعد تطبيق القواعد المذكورة سابقة في حساب معادلة قيد القطع الكسري.

(0+1)X1+(0+0.6)S1+(-1+0.9)S2= 1+0.7

0.6S1+0.9S2 >= 0.7

-0.6S1-0.9S2 <= -0.7

وبتحويل القيد الاخير الى معادلة باضافة المتغيرS3 نحصل على

-0.6S1-0.9S2 +S3= -0.7

ان المعادلة اعلاه تمثل معادلة القيد الذي سيقطع جزء معينا من حيز الحل مقتربين بذلك من الحيز الذي يحتوي على الحل العددي الامثل فتضاف تلك المعادلة الى الجدول (1) لينتج جدول اخر يكون على الشكل الاتي:

Table (2)

B.V	X1	X2	S1	***S2***	S3	RHS
Z	0	0	0.4	***0.1***	0	4.3
X1	1	0	0.6	***-0.1***	0	1.7
X2	0	1	-0.1	***0.3***	0	2.6
S3	***0***	***0***	***-0.6***	***-0.9***	***1***	***-0.7***

الان سيكون المتغير الخارج الذي يحمل قيمة سالبة هو المتغير S3 والمتغير الداخل هو المتغير S2 حسب طريقة السمبلكس المقابلة وبعد اجراء الحسابات نحصل على الجدول(3).

Table (3)

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	RHS
Z	0	0	0.3	0	0.2	4.2
X1	1	0	0.7	0	-0.2	1.8
X2	0	1	-0.3	0	0.3	2.3
S2	0	0	0.7	1	-1.2	0.8

وكم نلاحظ ان النتائج لاتزال ذات قيم حقيقية غير عددية لذا نحتاج الى تكوين قيد قطع ثانوي اخر معتمدين على المتغير الاساس الذي يمتلك اكبر قيمة حقيقية لذا سنختار X1 (0.8) وستكون المعادلة المقابلة لهذا المتغير كما مر سابقا:

(0+1)X1+(0+0.7)S1+(-1+0.8)S3=1+0.8

$0.7S1+0.8S3 \geq 0.8$

وبتحويل القيد اعلاه الى معادلة يصبح على الشكل الاتي:

-0.7S1-0.8S3+S4= -0.8

ثم يضاف الى الجدول(3) فنحصل على جدول جديد(4):

Table (4)

B.V	X1	X2	S1	S2	***S3***	S4	RHS
Z	0	0	0.3	0	***0.2***	0	4.2
X1	1	0	0.7	0	***-0.2***	0	1.8
X2	0	1	-0.3	0	***0.3***	0	2.3
S2	0	0	0.7	1	***-1.2***	0	0.8
S4	***0***	***0***	***-0.7***	***0***	***-0.8***	***1***	***-0.8***

فيكون المتغير الخارج هو المتغيرS4 والمتغير الداخل هو المتغيرS3 حسب طريقة السمبلكس المقابل وبعد اجراء الحسابات على الجدول(4) نحصل على جدول الحل الامثل كما مبين في الجدول (5):

Table (5)

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	S4	RHS
Z	0	0	0.2	0	0	0.2	4
X1	1	0	0.8	0	0	-0.2	2
X2	0	1	-0.6	0	0	0.4	2
S2	0	0	1.6	1	0	-1.4	2
S3	0	0	0.8	0	1	-1.2	1

لقد تم التوصل الى الحل الامثل الذي يحقق جميع قيود المشكلة, حيث ان قيمة المتغيرات الاساسية ذات قيم عددية صحيحة.

3. -طريقة التفرع والتحديد (Branch and Bound):

طريقة التفرع والتحديد هي اكثر الطرائق واسعة الاستخدام لحل كل من مسائل برمجة الاعداد الصحيحة التامة ومسائل برمجة الاعداد الصحيحة المختلطة في الواقع العملي,تتضمن خوارزمية التفرع والتحديد اجراءات تكرارية عددية كفوءة لاختيار الحلول العددية المتاحة كلها, مبتدء باهمال القيود العددية لمسألة برمجة الاعداد الصحيحة الخطية ومن ثم حل المسئلة برمجة خطية, اذا كان الحل الامثل للمسئلة الخطية صحيحا عدديا فالحل امثل من الناحية العدية, عدا ذلك طريقة التفرع والتحديد يتم اعتمادها بتطبيق عمليتين اساسيتين.

(1)- التفرع (Branching):

يقصد بالتفرع تقسيم فضاء الحل المستمر الى فضاءات فرعية(مسائل فرعية) مستمرة,الهدف من عملية التقسيم هو حذف أجزاء من الفضاء المستمر والذي يكون غير مقبول(infeasible) لمسألة برمجة الاعداد الصحيحة, وهذا يتم عن طريق القيود العددية الضرورية للحصول على الحلول العددية المثلى, ولكن في طريقة اخرى لايمكن حذف نقاط عددية غير متاحة,بمعنى اخر المجموعة الناتجة من المسائل الفرعية تعرف بشكل متكامل جميع نقاط الحل العددي المتاح للمسألة الاصلية,بسبب أعطي اسم التفرع (Branching).

(2)- التحديد (Bounding):

قيمة دالة الهدف المثلى لكل مسئلة فرعية للمسئلة الاصلية من نوع التعظيم او التصغير يحصل عليها من عملية التقسيم, اذ يتم ادراجها كحد اعلى اواصغر لقيمة دالة الهدف المرتبطة مع القيم العددية المتاحة لمتغيرات القرار, هذا الحد(Bound) اساسي لعملية ترتيب الحلول المثلى للمجموعات الفرعية, هذه العملية يطلق عليها اسم التحديد(Bounding).

ويمكن تمثيل خوارزمية التفرع والتحديد بالخطوات الرئيسية الاتية:

1- نقوم بايجاد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية باحدى الطرق المتاحة لحل نموذج البرمجة الخطية.
2- نقوم بتجزئة الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية من خلال التفرع لاحدى متغيرات القرار الذي يفترض ان يكون ذو قيمة عددية صحيحة والذي هو في الاصل ذو قيمة كسرية في الحل الامثل للبرمجة الخطية, وبما ان هناك متغيرات قرار اكثر من متغير تكون القيمة الكسرية بالحل الامثل للبرمجة الخطية والتي ايضا يجب ان تكون ذو قيمة عددية صحيحة لذلك يجب ان نحدد اي متغيرمن المتغيرات القرار ليرشح ان يكون متغير التفرع والاعتبارات المقترحة لمتغير المتفرع المناسب هي
   a- اختيار المتغير العددي ذو اكبر قيمة كسرية في حل البرمجة الخطية.
   b- تخصيص الاولوية للمتغيرات العددية من حيث الاهمية حسب المعايير ادناه:
      1- كونه يمثل قيمة حرجة للانموذج.
      2- كونها معامل ربح او معامل كلف في دالة الهدف.
      3- كونها تمثل قرارا مهما في الانموذج.

3- نقوم بايجاد الحل الامثل من خلال تحديد المتغير المتفرع الذي اصبحت قيمته صحيحة ونجد حل امثل اخر باسلوب البرمجة الخطية ونلاحظ القيم فاذا حصلنا على حل امثل لجميع متغيرات القرار قيم عددية صحيحة نتوقف عن هذا التفرع ونذهب الى التفرع الاخر وبنفس الاسلوب نجد حل اخر باستخدام البرمجة الخطية ونتوقف عندما نحصل على ان جميع متغيرات القرار ايضا ذو قيمة عددية صحيحة.

4- ونكرر نفس العملية في الفقرة (3) على جميع متغيرات القرار التي تكون قيمة كسرية في الحل الامثل للبرمجة الخطية نلاحظ من خلال التفرع لهذه المتغيرات بان نحصل على حلول غير اساسية غير مقبولة (infeasible) وحلول مثلى (feasible) ونقارن بين جميع الحلول المثلى التي تم الحصول عليها وناخذ افضل حل مناسب حسب طبيعة دالة الهدف ونهمل الحلول الغير اساسية.

ولغرض ايجاد معادلة القطع للمتغير الاساس الذي تكون قيمته في جدول الحل الامثل بطريقة السمبلكس الاعتيادي كسرية نقوم بتطبيق معادلة القطع الخاصة بذلك المتغير للتضاف الى جدول الحل الامثل وكما موضحة بتلك المعادلة.

$$SK- \left[\sum_{jE+j} \alpha\, w\, j+(fk/fk-1)\sum_{j\,E-1} \alpha\, w\, j\right]= -fk\ldots\ldots(4)$$

حيث ان SKيمثل المتغير المهمل الجديد الذي سيضاف الى قيد القطع للمتغير الاساس في جدول الحل الامثل الذي يحتوي على قيم كسرية, وان $\sum_{jE+j} \alpha wj$ تمثل مجموع الكسور الموجبة التي يتحويها معادلة المتغير الاساس في جدول الحل الامثل, و fk يمثل القيمة الكسرية في الجهة اليمنى من معادلة المتغير الاساس في جدول الحل الامثل,[$\sum_{jE-j} \alpha wj$ يمثل تمثل مجموع الكسور السالبة التي يتحويها معادلة المتغير الاساس في جدول الحل الامثل.

ولغرض توضيح هذه الطريقة وكيفية استخدام معادلة القطع للمتغير الاساس الذي تكون قيمته النهائية في جدول الحل الامثل كسرية (4) نستخدم المثال الاتي:

مثال (3):- اوجد الحل الامثل النموذج الرياضي الخطي الاتي:

Max Z=7X1+9X2

S.T: -X1+3X2<= 6 ,   7X1+X2<= 35, X1>=0and integer, X2>=0

Example (3):- Find the optimal solution for the mathematical linear programming model:-

Max Z=7X1+9X2

S.T:

-X1+3X2<= 6,

7X1+X2<= 35

, X1>=0and integer, X2>=0

خطوات الحل:-

1- نجد الحل الامثل الاولي باستخدام طريقة السمبلكس الاعتيادية وكما موضحة في جدول الحل الامثل الاتي:-

Table (6)

B.V	X1	X2	S1	S2	RHS
Z	0	0	28/11	15/11	63
X2	0	1	7/22	1/22	7/2
X1	1	0	-1/22	3/22	9/2

نلاحظ من خلال جدول الحل (6) ان قيمة المتغيرات الاساس X1,X2 عددية غير صحيحة وبما ان الشروط تنص على ان المتغير الاساس X1 يجب يكون قيمة عددية صحيحة خالية من الكسور , اما المتغير X2 فيجوز ان يكون قيمة كسرية, لذلك سنهتم فقط بقيمة المتغير X1 ونطبق علية معادلة القطع الخاصة بهذه الطريقة معادلة رقم(4) وكما موضحة ادناه:-

SK- $[\sum_{jE+j} \alpha w j+(fk /fk-1)\sum_{j E-1} \alpha w j]= -fk$…….(4)

S3-[3/22S2+(0.5/0.5-1)(-1/22S1]=-1/2

$$S3 - \left[\frac{3}{22}S2 + \left(\frac{1}{22}\right)S1\right] = -1/2$$

$$S3 - \frac{3}{22}S2 - \frac{1}{22}S1 = -1/2$$

ومن خلال اضافة هذه المعادلة الى نهاية جدول الحل الامثل نحصل على الجدول ادناه:-

Table (7)

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	RHS
Z	0	0	28/11	15/11	0	63
X2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
X1	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
S3	0	0	-1/22	-3/22	1	-1/2

ونكمل الحل الامثل باستخدام طريقة السمبلكس المقابل من خلال تحديد المتغير الخارج S3 وتحديد المتغير الداخلS2 , فاذا كانت قيمة المتغير الاساس X1 قيمة عددية صحيحة نتوقف عن الحل واذا كانت كسرية نستمر على الحل من خلال اضافة قيد قطع اخر حسب المعادلة رقم (4) وكما موضحة في الجدول ادناه (7):

Table (7)

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	RHS
Z	0	0	23/11	0	10	58
X2	0	1	10/66	0	1/3	20/6
X1	1	0	-1/11	0	1	4
S2	0	0	1/3	1	-22/3	11/3

نتوقف عن الحل لان قيمة المتغير الاساس X1 قيمة عددية صحيحة حسب الشروط النموذج الرياضي في جدول الحل الامثل في الجدول(7)

4 .طريقة حل نموذج البرمجة العددية للمتغيرات الثنائية(Binary model):-

تسخدم هذه الطريقة لحل النموذج الرياضي للبرمجة العددية عندما تكون جميع متغيرات القرار الاساسية ثنائية اي اما تأخذ قيمة (0) أو تأخذ قيمة (1) فقط. وسناخذ المثال الاتي لبيان كيفية حل نموذج الثنائي للبرمجة العددية.

مثال(4):- مقاطعة فيها (9) مدن هذه المقاطعة ترغب في تحديد مكان انشاء مراكز اطفاء في هذه المدن. وهذه المقاطعة تهدف الى انشاء اقل عدد ممكن من مراكز الاطفاء بحيث تكون على الاقل مركز اطفاء واحد في كل مدينة بحيث يضمن ان يكون الوقت لايصال سيارات الاطفاء لكل مدينة ضمن الوقت المعياري وهو (20) دقيقة. اذا علمت ان الوقت بين المدن مقدر بالدقائق وموضح في الجدول ادناه:-

Example (4):- There are nine cities in the county. The county must determine where to build fire stations. The county wants to build the minimum number of fire needed to ensure that at least one fire station is within 20 minutes (driving time) of each city. The time s (in minutes) required to drive between the cities in county are shown in (Table 8) .formulate an IP that will tell county how many fire stations should be built and where they should be located).

Table (8)

to / from	City 1	City 2	City 3	City 4	City 5	City6	City 7	City 8	City9
City 1	0	15	22	10	30	12	28	16	30
City 2	15	0	21	40	16	25	33	38	24
City 3	22	21	0	45	17	12	26	35	10
City 4	10	40	45	0	34	15	18	44	21
City 5	30	16	17	34	0	20	30	18	41
City6	12	25	12	15	20	0	10	27	16
City 7	28	33	26	18	30	10	0	28	22
City 8	16	38	35	44	18	27	28	0	29
City9	30	24	10	21	41	16	22	29	0

الحل:-

1- نحدد دالة الهدف وهي عدد مراكز الاطفاء التي سيتم بنائها في هذه المقاطعة وهو اقل عدد ممكن من بناء هذه المراكز.

Min Z = X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9

2- نحد قيد لكل مدينة يتتحقق فيها وقت الوصول ضمن الوقت المعياري(20) دقيقة على النحو الاتي:-

S.to: X1+X2+X4+X6+X8>= 1 ……(City 1 constraint)

X1+X2+X5>= 1……..(City 2 constraint)

X3+X5+X6+X9 >= 1…….(City 3 constraint)

X1+X4+X6+X6 >= 1……(City 4 constraint)

X2+X3+X4+X5+X8 >= 1……..(City 5 constraint)

X1+X3+X4+X5+X6+X7+X9 >= 1 (City 6 constraint)

X4+X6+X7 >= 1…….(City 7 constraint)

X1+X5+X8>= 1……..(City 8 constraint)

X3+X6+X9 >= 1…….(City 9 constraint)

Xi =0 or 1 (i=1,2,3,4,5,6,7,8,9)

وعند ايجاد الحل الامثل باستخدام طريقة السمبلكس الاعتيادي ضمن شروط المتغيرات الاساسية نحصل على النتائج الاتية:-

ان قيمة دالة الهدف تساوي (2) مركزين للا اطفاء ستقوم ببنائها وهي ضمن المدينة (5) وضمن المدينة رقم (6), اي ان (X5=X6=1) , ولم يتم بناء اي مركز اطفاء في المدن الاخرى

اي(X1=X2=X3=X4= X7=X8=9 =0).

5. طريقة حل نموذج البرمجة العددية الثنائي المختلطmixed Binary Integer model

تسخدم هذه الطريقة لحل النموذج الرياضي للبرمجة العددية عندما يكون بعض متغيرات القرار ذو قيم عددية صحيحة وقسم اخر ذو قيم عددية كسرية وقسم من هذه المتغيرات يحتاج الى

متغيرات ثنائية لغرض تحديد قيم متغيرات الاساس حسب طبيعة كل مسائلة, لذلك سنتناول مثال تطبيقي على نموذج البرمجة العددية الثنائي المختلط لبعض التطبيقات وكما موضح ادناه:

مثال(4):- شركة تنتج ثلاثة انواع من الثلاجات ذو حجم صغير وحجم متوسط وحجم كبير, وتعتمد هذه على المواد الاولية من مادة البليت وساعات العمل في عملية انتاج الثلاجات, حيث ان انتاج وحدة واحدة من الثلاجة الصغيرة الى (0.5) طن من مادة البليت,ويحتاج الى (25) ساعة عمل, وكذلك الى النوع الثاني ثلاجات متوسطة الحجم يحتاج الى (0.65) طن من مادة البليت, ويحتاج الى (30) ساعة عمل , وكذلك بالنسبة الى النوع الثالث من الثلاجات كبيرة الحجم الى (0.90) طن من مادة البليت, ويحتاج الى (36) ساعة عمل. ان الكميات المتاحة من مادة البليت هي (500) طن من مادة البليت , و(7000) ساعة عمل متاحة لدى الشركة, وهذه الشركة يكون انتاجها مشروط بحجم الدفعة الانتاجية لكل نوع ان لايقل عن (150) ثلاجة من كل نوع لكي يكون القرار الانتاجي قرار ذو جدوى اقتصادية. وان ربح الوحدة الواحدة من النوع الاول($100), والنوع الثاني هو ($150) اما النوع الثالث فهو ($200).

المطلوب تعظيم الارباح وفق هذه الشروط.

Example (4):-

(Company manufacturing three types of Refrigerator: Small, medium and large, the resources required for, and profits yielded by, each type of Refrigerator are shown in table (9). At present, 500 tons of plate and 7000 hours of labor are available. For production of a type of Refrigerator to be economically feasible, at least 150 Refrigerator of that type must be produced formulates an IP to maximize company's profit).

Table 9

TYPE	small	medium	Large
plate required	(tons)0.50	(tons)0.65	(tons)0.90
Labor required	(hours) 25	(hours)30	(hours)36
profit	$100	$150	200$

الحل: نعرف انواع الثلاجات فنفرض المتغيرX1 يمثل عدد الثلاجات المنتجة من النوع الاول, والمتغيرX2 يمثل عدد الثلاجات المنتجة من النوع الثاني, المتغيرX3 يمثل عدد الثلاجات المنتجة من النوع الثالث ولذلك سيكون ا لنموذج الرياضي وفق الصيغة الاتية:-

Max Z= 100X1+150X2+200X3

من خلال شروط الانتاج لكل دفعة انتاجية من اي نوع من الانواع الثلاثة يجب ان تكون (150) ثلاجة او اكثر ولتحقيق ذلك لابد من توفر القيود الثلاثة وهية:-

Constraint-1: X1<=0 or X1>=150.

Constraint-2: X2<=0 or X2>=150.

Constraint-3: X3<=0 or X3>=150.

وبما ان الامكانيات المتاحة محدودة وهي كميات البليت وساعات العمل لذلك ستستخدم الشركة على الاكثر(500)طن , وعلى الاكثر تستخدم(7000) ساعات عمل لذلك سيتم استبدال القيد الاول بالقيد المزدوج الاتي:-

X1<=M1y1; 150-X1<=M1 (1-y1); y1=0 or 1

ومن المعلوم ان(150-X1),(X1) لاتزيد عن M1 وان قيمةال(M1) تحدد على اقل كمية انتاج من النوع الاول وفق امكانيات كمية البليت والساعات المتاحة للعمل ضمن المعاملات التكنلوجية لتصنيع وحدة واحدة من النوع الصغير فتحدد قيمتها من خلال(7000/250) وهي اكبر كمية يمكن انتاجها من هذا النوع من الثلاجات(280) ثلاجة, وبنفس الاسلوب نستبدل القيد الثاني للمنتج الثاني (X2) بالقيد المزدوج الاتي:-

X2<=M2y2; 150-X2<=M2 (1-y2); y2=0 or 1

وان قيمةال(M2) تحدد على اقل كمية انتاج من النوع الثاني وفق امكانيات كمية البليت والساعات المتاحة للعمل ضمن المعاملات التكنلوجية لتصنيع وحدة واحدة من النوع المتوسط فتحدد قيمتها من خلال(7000/30) وهي اكبر كمية يمكن انتاجها من هذا النوع (233.33) ثلاجة , وبنفس الاسلوب نستبدل القيد الثالث للمنتج الثالث(X3) بالقيد المزدوج الاتي:- X3<=M3y3; 150-X3<=M3 (1-y3); y3=0 or 1

وان قيمةال(M3) تحدد على اقل كمية انتاج من النوع الثالث وفق امكانيات كمية الستيل والساعات المتاحة للعمل ضمن المعاملات التكنلوجية لتصنيع وحدة واحدة من النوع الكبير فتحدد قيمتها من خلال(7000/36) وهي اكبر كمية يمكن انتاجها من هذا النوع من السيارات(194.44) ثلاجة. ويمكن ان نحدد قيد رابع لكمية البليت المتاحة لاانتاج ثلاثة انواع من االثلاجات وفق القيد الرابع الموضح ادناه:-

0.5X1+0.65X2+0.90X3<=500(plate constraint-4).

ونحد القيد الخامس لكمية ساعات العمل المتاحة لاانتاج ثلاثة انواع من السيارات وفق القيد الخامس الموضح ادناه:-

25X1+30X2+36X3<=7000(Labor constraint-5).

وهناك شرط اخير هو ان تكون المنتجات الثلاثة موجبة وكذلك قيم عددية صحيحة. لذلك سيصبح النموذج الرياضي لهذه المسائلة وفق جميع القيود التي تم مناقشتها اعلاه وفق الصيغة الاتية:-

Max Z= 100X1+150X2+200X3

s.t: X1<=280y1 -----(1)

150-X1<=280 (1-y1)-----(2)

X2<=233.33y2 -----(3)

150-X2<=233.33 (1-y2) ----(4)

X3<=194.49y3--------(5)

150-X3<=194.49 (1-y3)------(6)

0.50X1+0.65X2+0.90X3<= 500….(7)

25X1+30X2+36X3<=7000----(8)

X1,X2,X3>=0 and integer

y1,y2,y3=0 or 1

ويكون الحل الامثل لهذ النموذج من خلال استخدام البرنامج WQSB هو قيمة الارباح المتحققة من خلال انتاج (X3=2000) ثلاجة من النوع الثالث كبيرة الحجم فقط,والربح المتحقق من خلال ذلك هو(Z=38800) وحدة نقدية وان قيمة المنتج الاول (X1=0) , وكذلك الثاني(X2=0) وان قيمة المتغير الثنائي (y3=1), وقيمة المتغير الثنائي (y2=0) , وقيمة المتغير الثنائي الثالث(y31=0).وفق جمعيع قيود المفروضة المنوه عنها اعلاه.

9– 5أمثلة محلولة لنماذج البرمجة العددية:

مثال(5):- اوجد الحل الامثل النموذج الرياضي الخطي الاتي:

Minimize Z = 2X1+X2

S.to: 3X1+X2 >= 3

4X1+3X2>= 6

X1+2X2<= 3

X1,X2>=0 and IP

Example (5):- Find the optimal solution for the mathematical linear programming model:

نقوم اولا بأيجاد الحل الامثل بطريقة السمبلكس المقابلة(dual simplex) ونحص على الحل الامثل الموضح ادناه:

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	RHS
Z	0	0	-2/5	-1/5	0	12/5
X1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
X2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
S3	0	0	-1	1	1	0

نستنتج ان Z= 12/5,X1=3/5,X2=6/5

كما نلاحظ ان النتائج التي تم الحصول عليها في الخطوة الاولى ليست ذات قيم عددية صحيحة لجميع المتغيرات ننتقل الى الخطوة رقم (2).

2نكون قيد قطع ثانوي يضاف الى جدول الحل الامثل وتعتمد عملية تكوين هذا القطع على المتغير الاساس ذو القيمة الحقيقية في عمود الحل (R.H.S) الذي يمتلك اكبر جزء حقيقي من بين المتغيرات الحقيقية الاخرى, ومن جدول الحل الامثل نلاحظ ان الجزء الحقيقي للمتغير X1 هو(0.6) اما الجزء

الحقيقي للمتغير X2 هو(0.2) لذلك سنختار صف المتغير X1 اما المعادلة التي تقابل هذا المتغير في جدول الحل الجديد فتحسب باالشكل الاتي:- (X1-3/5S1+ 1/5S2=1.7) .

اذ يمكن اعادة كتابة المعادلة اعلاه ب صيغة اخرى بعد تطبيق القواعد المذكورة سابقة في حساب معادلة قيد القطع الكسري.

X1+(-5/5+2/5)S1+1/5S2=1.7

X1-S1+2/5S1+1/5S2=1.7

سنقوم باضافة القيد الاتي الى جدول الامثل على النحو الاتي:

2/5S1+1/5S2>=0.7

سيتم تحويل هذا القيد الى(-2/5S1-1/5S2+S4=-0.7), وسيتم الاضافة لجدول الحل الامثل

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	S4	RHS
Z	0	0	-2/5	-1/5	0	0	12/5
X1	1	0	-3/5	1/5	0	0	3/5
X2	0	1	4/5	-3/5	0	0	6/5
S3	0	0	-1	1	1	0	0
S4	0	0	-2/5	-1/5	0	1	-0.7

وعن طريق استخدام طريقة السمبلكس المقابلة نحصل على الحل الامثل:(X1=1,X2=1,Z=3)

مثال(5):- لو عطي نفس النموذج الرياضي الخطي في المثال السابق لكن فقط يريد المتغيرX2IP لذلك سنستخدم طريقة التفرع والتقيد في حل المثال اعلاه.

Example (5):- Find the optimal solution for the mathematical linear programming model:

Minimize Z = 2X1+X2

S.to: 3X1+X2 >= 3

4X1+3X2>= 6

X1+2X2<= 3

X1,>= 0 and X2>=0 and IP

سنقوم باستخدام خوارزمية التفرع والتقيد الخاصة بالمتغير (X2) وهي:

$SK- [\sum_{jE+j} \alpha w j+(fk /fk-1)\sum_{j E-1} \alpha w j]= -fk…….(4)$

S4-[0.8S1+(0.2/0.2-1)*-0.6S2]=-0.2

S4-[0.8S1+0.15S2]=-0.2

S4-0.8S1-0.15S=-0.2

سيتم اضافة هذا القيد الى جدول الحل الامثل للبرمجة الخطية فيصبح جول السمبلكس بعد اضافة هذا القيد على النحو الاتي:

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	S4	RHS
Z	0	0	-2/5	-1/5	0	0	12/5
X1	1	0	-3/5	1/5	0	0	3/5
X2	0	1	4/5	-3/5	0	0	6/5
S3	0	0	-1	1	1	0	0
S4	0	0	-0.8	-0.15	0	1	-0.2

ومن خلال استخدام طريقة السمبلكس المقابلة نحصل على الحل الامثل كما مبين في النتائج الاتية:
(Z=2.5,X1= 0.75, X2= 1).

مثال(6):- مقاطعة فيها (6) مدن هذه المقاطعة ترغب في تحديد مكان انشاء مراكز اطفاء في هذه المدن. وهذه المقاطعة تهدف الى انشاء اقل عدد ممكن من مراكز الاطفاء بحيث تكون على الاقل مركز اطفاء واحد في كل مدينة بحيث يضمن ان يكون الوقت لايصال سيارات الاطفاء لكل مدينة ضمن الوقت المعياري وهو (15) دقيقة. اذا علمت ان الوقت بين المدن مقدر بالدقائق وموضح في الجدول ادناه:-

Example (6):- There are six cities in the county. The county must determine where to build fire stations. The county wants to build the minimum number of fire needed to ensure that at least one fire station is within 15 minutes (driving time) of each city. The time s (in minutes) required to drive between the cities in county are shown in (Table 8) .formulate an IP that will tell county how many fire stations should be built and where they should be located).

Table (8)

to / from	City-1	City-2	City-3	City-4	City-5	City-6
City-1	0	10	20	30	30	20
City-2	10	0	25	35	20	10
City-3	20	25	0	15	30	20
City-4	30	35	15	0	15	25
City-5	30	20	30	15	0	14
City-6	20	10	20	25	14	0

الحل:-

1- نحدد دالة الهدف وهي عدد مراكز الاطفاء التي سيتم بنائها في هذه المقاطعة وهو اقل عدد ممكن من بناء هذه المراكز.

Min Z = X1+X2+X3+X4+X5+X6

2- نحد قيد لكل مدينة يتتحقق فيها وقت الوصول ضمن الوقت المعياري(15) دقيقة على النحو الاتي:-

X1+X2 >= 1 (City 1 constraint)

X1+X2+X6 >= 1 (City 2 constraint)

X3+X4 >=1 (City 3 constraint)

X3+X4+X5 >=1 (City 4 constraint)

X4+X5+X6 >=1 (City 5 constraint)

X2+X5+X6 >=1 (City 6 constraint)

Xi =0 or 1 (i=1,2,3,4,5,6)

وعند ايجاد الحل الامثل باستخدام طريقة السمبلكس الاعتيادي ضمن شروط المتغيرات الاساسية نحصل على النتائج الاتية:-

ان قيمة دالة الهدف تساوي (2) مركزين للا اطفاء ستقوم ببنائها وهي ضمن المدينة (2) وضمن المدينة رقم (4), اي ان (X2=X4=1) ولم يتم بناء اي مركز اطفاء في المدن الاخرى

اي(X1=X3=X5=X6=0).

مثال(7):- شركة تنتج ثلاثة انواع من السيارات ذو حجم صغير وحجم متوسط وحجم كبير, وتعتمد هذه الشركة على المواد الاولية من مادة الستيل وساعات العمل في عملية انتاج السيارات, حيث ان انتاج وحدة واحدة من السيارات الصغيرة الى (1.5) طن من مادة الستيل,ويحتاج الى (30) ساعة عمل, وكذلك الى النوع الثاني سيارات متوسطة الحجم يحتاج الى (3) طن من مادة الستيل, ويحتاج الى (25) ساعة عمل , وكذلك بالنسبة الى النوع الثالث من السيارات كبيرة الحجم الى (5) طن من مادة الستيل, ويحتاج الى (40) ساعة عمل. ان الكميات المتاحة من مادة الستيل هي (6000) طن من مادة الستيل , و(60000) ساعة عمل متاحة لدى الشركة, وهذه الشركة يكون انتاجها مشروط بحجم الدفعة الانتاجية لكل نوع ان لايقل عن (1000) سيارة من كل نوع لكي يكون القرار الانتاجي قرار ذو جدوى اقتصادية. وان ربح الوحدة الواحدة من النوع الاول($2000), والنوع الثاني من السيارات هو ($3000) اما النوع الثالث فهو ($4000).

المطلوب تعظيم الارباح وفق هذه الشروط.

Example (7):-Company manufacturing three types of care: compact, midsize, and large. The resources required for, and profits yielded by, each type of car are shown in table (9). At present, 6000 tons of steel and 60000 hours of labor are available. For production of a type of car to be economically feasible, at least 1000 cars of that type must be produced formulate an IP to maximize company's profit).

Table (9)

TYPE	compact	midsize	Large
Steel required	(tons)1.5	(tons)3	(tons)5
Labor required	(hours) 30	(hours)25	(hours)40
profit	$2000	$3000	4000$

الحل: نعرف انواع السيارات فنفرض المتغيرX1 يمثل عدد السيارات المنتجة من النوع الاول, والمتغيرX2 يمثل عدد السيارات المنتجة من النوع الثاني, المتغيرX3 يمثل عدد السيارات المنتجة من النوع الثالث ولذلك سيكون ا لنموذج الرياضي وفق الصيغة الاتية:-

Max Z= 2000X1+3000X2+4000X3

من خلال شروط الانتاج لكل دفعة انتاجية من اي نوع من الانواع الثلاثة يجب ان تكون (1000) سيارة او اكثر ولتحقيق ذلك لابد من توفر القيود الثلاثة وهية:-

Constraint-1: X1<=0 or X1>=1000.

Constraint-2: X2<=0 or X2>=1000.

Constraint-3: X3<=0 or X3>=1000.

وبما ان الامكانيات المتاحة محدودة وهي كميات الاستيل وساعات العمل لذلك ستستخدم الشركة على الاكثر(6000)طن , وعلى الاكثر تستخدم(60000) ساعات عمل لذلك سيتم استبدال القيد الاول بالقيد المزدوج الاتي:-

X1<=M1y1; 1000-X1<=M1 (1-y1); y1=0 or 1

ومن المعلوم ان(1000-X1),(X1) لاتزيد عن M1 وان قيمةال(M1) تحدد على اقل كمية انتاج من النوع الاول وفق امكانيات كمية الستيل والساعات المتاحة للعمل ضمن المعاملات التكنلوجية لتصنيع وحدة واحدة من النوع الصغير فتحدد قيمتها من خلال(60000/30) وهي اكبر كمية يمكن انتاجها من هذا النوع من السيارات(2000) سيارة, وبنفس الاسلوب نستبدل القيد الثاني للمنتج الثاني (X2) بالقيد المزدوج الاتي:-

X2<=M2y2; 1000-X2<=M2 (1-y2); y2=0 or 1

وان قيمةال(M2) تحدد على اقل كمية انتاج من النوع الثاني وفق امكانيات كمية الستيل والساعات المتاحة للعمل ضمن المعاملات التكنلوجية لتصنيع وحدة واحدة من النوع المتوسط فتحدد قيمتها من خلال(6000/3) وهي اكبر كمية يمكن انتاجها من هذا النوع من السيارات(2000) سيارة , وبنفس الاسلوب نستبدل القيد الثالث للمنتج الثالث(X3) بالقيد المزدوج الاتي:- -1000 X3<=M3y3; X3<=M3 (1-y3); y3=0 or 1

وان قيمةال(M3) تحدد على اقل كمية انتاج من النوع الثالث وفق امكانيات كمية الستيل والساعات المتاحة للعمل ضمن المعاملات التكنلوجية لتصنيع وحدة واحدة من النوع الكبير فتحدد قيمتها من خلال(6000/5) وهي اكبر كمية يمكن انتاجها من هذا النوع من السيارات(1200) سيارة. ويمكن ان نحدد قيد رابع لكمية الستيل المتاحة لاانتاج ثلاثة انواع من السيارات وفق القيد الرابع الموضح ادناه:-

1.5X1+3X2+5X3<=6000(steel constraint-4).

ونحد القيد الخامس لكمية ساعات العمل المتاحة لاانتاج ثلاثة انواع من السيارات وفق القيد الخامس الموضح ادناه:-

30X1+25X2+40X3<=60000(Labor constraint-5).

وهناك شرط اخير هو ان تكون المنتجات الثلاثة موجبة وكذلك قيم عددية صحيحة. لذلك سيصبح النموذج الرياضي لهذه المسائلة وفق جميع القيود التي تم مناقشتها اعلاه وفق الصيغة الاتية:-

Max Z= 2000X1+3000X2+4000X3

s.t: X1<=2000y1 -----(1)

1000-X1<=2000 (1-y1)-----(2)

X2<=2000y2 -----(3)

1000-X2<=2000 (1-y2) ----(4)

X3<=2000y3--------(5)

1000-X3<=1200 (1-y3)------(6)

1.5X1+3X2+5X3<=6000(steel constrain)--------(7)

30X1+25X2+40X3<=60000(Labor constraint)-------(8)

X1,X2,X3>=0 and integer

y1,y2,y3=0 or 1

ويكون الحل الامثل لهذ النموذج من خلال استخدام البرنامج WQSB هو قيمة الارباح المتحققة من خلال انتاج (X2=2000) سيارة من النوع الثاني فقط هو(Z=6000) وحدة نقدية وان قيمة المنتج الاول (X1=0) , وكذلك الثالث(X3=0) وان قيمة المتغير الثنائي (y2=1), وقيمة المتغير الثنائي (y2=1) , وقيمة المتغير الثنائي الثالث(y3=0).وفق جمعيع قيود المفروضة المنوه عنها اعلاه.

مثال(8):- معمل للأنتاج الملابس يرغب في عملية انتاج ثلاثة انواع وهي قمصان, وفانيلات, وسراويل. وان عملية انتاج كل نوع يحتاج الى شخص متخصص في عملية تفصيل كل نوع من هذه الانواع وهذا الشخص يستلم من المعمل اجورمقطوعة اسبوعيا سوى انتج المعمل قطعة واحدة او اكثر, ان اجور تفصيل النوع الاول في الاسبوع هو $150 , واجور تفصيل النوع الثاني هو $200 , واجو تفصيل النوع الثالث هو $100 . ان عملية انتاج الانواع الثلاث تتطلب كمية من الاقمشة وعدد من العمال, وان كمية الاقمشة المتاحة في المعمل هي 160 يارد مربع،وعدد ساعات العمل المتاحة هو 150 ساعة. وان متطلبات انتاج كل نوع من هذه المنتجات من الاقمشة وساعات العمل وكذلك كلفة الانتاج وسعر البيع لكل منتج موضح في الجدول رقم (10), وان المعمل يرغب في اعداد خطة انتاجية تحقق له اكبر ربح ممكن من خلال انتاج هذه المنتجات وفقا للقيود المفروضة على العملية الانتاجية.

Example (8):- company manufacturing three type of clothing: shirts, shorts, and pants. The manufacturing of each type of clothing requires the appropriate type of machinery available. The machinery needed to manufacture each type of clothing must be rented at the following

rates: shirt machinery,$200 per week, short machinery,$150 per week, pants machinery,$100 per week. The manufacture of each type of clothing also requires mounts of cloth and labor shown in table 10.Each week 150 hours of labor and 160 sq yd of cloth are available.

Table (10)

Products-type	Labor (hours)	Cloth (squares yards	Sales price	cost
shirts	3	4	$12	$6
shorts	2	3	$8	$4
pants	6	4	$15	$6

لغرض صياغة المشكلة لابد من تعريف متغيرات القرار:

X1: عدد الوحدات المنتجة من النوع الاول القمصان.

X2: عدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني فانيلات.

X3: عدد الوحدات المنتجة من النوع الثالث سراويل.

Y1 : =1 اذا تم انتاج اي عدد من المنتج الاول

Y1= 0 اذا لم يتم انتاج اي عدد من المنتج الاول

Y2= 1 اذا تم انتاج اي عدد من المنتج الثاني

Y2= 0 اذا لم يتم انتاج اي عدد من المنتج الثانيس

Y3= اذا تم انتاج اي عدد من المنتج الثالث

Y3= اذا لم يتم انتاج اي عدد من المنتج الثالث

ان مجموع الارباح المتحققة للمعمل في الاسبوع=(مجموع العوائد من بيع المنتجات)-(مجموع كلف الانتاج)-(مجموع كلف تاجير العامل لتفصيل كل نوع من الانواع الثلاثة المنتجة)

Weekly profit=(12X1+8X2+15X3)-(6X1+4X2+8X3)-(200Y1+150Y2+100Y3)

تصبح دالة الهدف:

Maximize Z= 6X1+4X2+7X3-200Y1-150Y2-100Y3

S.T: 3X1+2X2+6X3<= 150(labor constraint) …..(1)

4X1+3X2+4X3<= 16 (cloth constraint……...(2)

X1,X2,X3>=0,X1,X2,X3 integer…….(3)

Y1,Y2,Y3=0 or 1…….(4)

يجب ان يضاف قيود للمتغيرات الثنائية(Yi) وعلاقتها مع متغيرات القرار الرئيسية (Xi) وفق الصيغة التالية:

X1<=M1Y1……(5)

X2<=M2Y2……(6)

X3<=M3Y3……(7)

حيث تمثل (Mi) قيم كبيرة موجبة, ووفق الامكانيات المتاحة المذكورة في القيود(2,3,4) يمكن تحديد قيم (M1=40),(M2=53),(M3=25), وهذا يعني اذا تم انتاج عدد من الوحدات من المنتج الاول تكون قيمةY1=0 واذا لم يتم انتاج اي وحدة من المنتج الاول يكون قيمة المتغير الثنائي Y1=0 , وهذا نفس الاسلوب يكون على المتغيرات الثنائية الاخرى. ومن خلال استخدام البرنامج الحاسب الالكترونية يتم حل النموذج الرياضي وتكون النتائج وفق الاتي:

Z=$75,X3=25 unites,Y3=1,X2=X3=Y1=Y2=0.

تمارين وأسئلة الفصل التاسع عن البرمجة العددية

Q1: a company wants to build the minimum number of fire stations needed to ensure that at least on fire station is within (17) minutes (driving time) of each six city. The times required to drive between this cities are shown in table-1.

Formulate an IP Model that will tell a company how many fire stations should be built and where they should be located by using IP model.

1- Table-1

	City-1	City-2	City-3	City-4	City-5	City-6
City-1	0	10	20	30	30	20
City-2	10	0	25	35	20	10
City-3	20	25	0	15	30	20
City-4	30	35	15	0	15	25
City-5	30	20	30	15	0	14
City-6	20	10	20	25	14	0

1- شركة ترغب ببناء اقل مايمكن من مراكز الاطفاء لحدى المدن بحيث ان خدمات الاطفاء تصل الى 6 قرى العائده لهذه المدينة بالتساوي وان وحدت القياسى الزمني هي سبعة عشر دقيقة يجب ان تصل اليها سيارات الاطفاء. المطوب مهي عدد مراكز الاطفاء التي تغطي قرى هذه المدينة ضمن الوقت القياسي لوصول سيارات الاطفاء باستعمال البرمجة العددية.

Q2: consider the following L.P model:

2- Max Z= X1+ X2

S.to

Max Z= X1+ X2

S.to

2X1 + X2 <= 6

X1 + 5X2 <=20

X1, X2 > 0, X1, X2 integer.

Q3: company manufacturing two models of its current line of personal computers KCU and KCP. THE KCU, which purchased primarily by universities and other businesses that network their computers, is equipped with two floppy drives and no hard disk drive, this model needs(0.7) production hours. The KCP is designed for home and personal use and is equipped with one floppy drive and one hard disk drive, this model needs (0.9) production hours. Each model is housed in a tower case. At present, 2000 of floppy drives, 900 of hard disk, 1000 of Tower case and 580 of production hours. The profit of KCU 100$ per unit and 250$ per unit of KCP model, for production of a type of computer to be economically feasible, at least 550 computer of that type must be produced. Formulate an IP to maximize company's profit.

3- شركة تنتج نوعين من الحاسبات الالكترونية وهي KCU,KCP النوع الاولKCU مخصص للجامعات ورجال الاعمال وان متطلباتها هي تحتوي على اثنانمن سواقة التحريك ولاتحتوي على قرص خزن, وهذا النوع يحتاج الى 0.9 ساعة عمل ويحتوي ايضا هذا النوع على الغطاء الخارجي للجهاز وانوع الثاني من الحاسباتKCP مخصص ليستخدم في البيوت او في المكاتب (LAPTOP) فيها محرك مرن واحد وفيها قرص خزن وتحتاج ايضا الى غطاء خارجي, ويحتاج الى 0.9 ساعة عمل. الشركة لديها 2000 محرك سرعة ,ولديها 900قرص خزن,ولديها غطاء خارجي1000 غطاء وتملك على الاكثر580ساعة عمل انتاجية. علما ان ربح النوع الاول$100 والنوع الثاني $250 على شرطة ان تكون حجم الدفعة الاقتصادية الانتاج لاتقل عن 550 حاسبة من كل نوع. اوجد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع ضمن شروط حجم الدفعة الانتاجية على ان تحقق على ربح ممكن ضمن الامكانيات المتاحة للشركة باستعمال اسلوب البرمجة العددية.

Q5: consider the following IP:

Min Z= 2X1- 9X2

S.to

2X1 + X2 < 5

-4 X1 + X2 < 5

X1, X2 > 0, X1, X2 integer.

4 اوجد الحل الامثل للنموذج الرياضي الخطي الاتي مستخدما اسلوب البرمجة العددية

Min Z= 2X1- 9X2

S.to

2X1 + X2 < 5

-4 X1 + X2 < 5

X1, X2 > 0, X1, X2 integer.

المصادر العربية

1.بخايا،ماجد عبدالله ، فاروق وسام ،"مقدمة في بحوث العمليات"،المكتبة الوطنية ، بغداد، 2000.

2. البنداني، محمد اسعد عبد الوهاب، "مقدمة في بحوث العمليات"، الطبعة الثالثة، عمان، الاردن، 1998.

3.حمدان، فتحي خليل، بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب، دار وائل للنشر، عمان 2010.

4. السامرائي، حسين الطيف، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار الهلال، عمان، 1997.

5.الشمرتي ، ا . د حامد سعد نور ، "بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا" مكتية الذاكرة للنشر والتوزيع ، بغداد ، الطبعة الاولى ، 2010.

6.الشمرتي ، ا . د حامد سعد نور ، والزبيدي ، علي خليل " مدخل الى بحوث العمليات " دار مجدلاوي للنشر والتوزيع ، عمان – الاردن ، الطبعة الاولى ، 2007 .

7. الشمري، حامد سعد نور، بحوث العمليات مفهوماً وتطبيقاً، مكتبة الذاكرة، بغداد 2001.

8. العبيدي، محمود الفضل، مؤيد عبد الحسين، بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال، عمان 2004.

9. العلي: عبد الستار محمد , ادارة الانتاج بين النظرية والتطبيق , دار الكتب جامعة البصرة في العراق ,1986, الفصل السادس عشر.
10. الفتال ، ا . د حميد ناصر حميد ، والجواد ، ا . د دلال صادق "بحوث العمليات" دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ، عمان – الاردن ، الطبعة العربية ، 2008.
11. الفضل، مؤيد عبد الحسين، "الاساليب الكمية في الادارة"، دار البازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الاردن، 2004.
12. القاضي، زياد عبد الكريم، عاطف جابر، عمر ابو الحسن، "بحوث العمليات"، دار المستقبل للنشر، عمان، الاردن، 1990.
13. محمد، صادق ماجد، "بحوث العمليات"، الطبعة الأولى، مطبعة دار الحكمة، بغداد، العراق، 1991.
14. النعيمي، محمد عبد العال واخرون، "مقدمة في بحوث العمليات"، دار الوائل للنشر، عمان، الاردن، 1999.
15. النعيمي، محمد عبد العال وآخرون، مقدمة في بحوث العمليات، دار وائل للنشر، عمان– الأردن، 1999.
16. النيداني ، محمد اسعد عبد الوهاب ، "مقدمة في بحوث العمليات"، الطبعة الثالثة ، عمان– الأردن ، 1998.

المصادر الاجنبية

1. AL Najjar A. M., "Production and Operations Management, 2004.
2. Anderson, D . R. Sweeney D. G., Williams , T. A. "Introduction to Management Science A Quantitive Approach to Decision Making with CD- Roum, New York, 2001.
3. Bazaraa , M.J and M. sherali ,linear programming and network 2nd ed.wiley,new York 1990
4. Behnezhof, A. R., and Khoshnevis, B., "Integration of machine requirements is planning and aggregate production planning, production planning and control, vol.7, no.3, pp.2,2-92, 8, 2000.

5. Bitram, G., R., and A. C., Hax. Desegregation and Resource allocation using covex Kanpsack problems. Management Science , 27, 431-441.1, 88.
6. Chelliah Sriskandarajah = Production of operations management" 2003.
7. Evans, J. R., Oison, D. L., "Statistics, Data Analysis, and Decision Modeling", 1st ed. Prentice Hall, New Jersey, 2000.
8. Gupta, A., D. S. Hira, Operation Research, Chand & Company LID, New Delhi, 1987.
9. Hamdy, A., Taha, Operation Research An Introduction, 6th ed. Coller MacMillian, 1997.
10. J. R., Evans, Applies production and Operations management , west publishing Co., America .1993.
11. Lipsky, L, Transportation problem Macmillan new York 1992.
12. Nagasawa, Hirotuki, and Katsundo Hitomi, Decision analysis for determines the optimum. Part 2: Deference between plants horizons in weekly and in monthly schedule "International Journal of production research 23 (2): 423-38.1995.
13. Nemhauser, G and L.Wolsey Integer and Combinatorial optimization Wiley new York 1998.
14. Philip, D. T., Ravidran & Slberg, Operation Research: Principles and Practice, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1987.
15. Prem Kumar Gupta and D.S.Hira" OPERATIONS RESEARCH: an Introduction" 2th edition (1989) S. Chand and Company LTD,NewDelhi.
16. Render ,B, Ralph M-Stair, JR. Michel E. Hanna, " Quanti tative Analysis for Management" Pearson prentice-hall2006
17. Render, B., Stair R. M., Quantitative Analysis for Management , 7th ed., Prentice Hall, New York, 2000.
18. W.J. Stevenson , Production / Operations management, Richard D. Irwin, Chicago, 1996.
19. WAYNE L .WINSTON" OPERATIONS RESEARCH, Applications and Algorithms"(1993), Prentice-Hall
20. William, H"Model building In Mathematical programming" 3ed Wiley new York 1990.
21. Wolsey L. Integer programming Wiley new York 1998 .

View publication stats